



**SORBONNE
UNIVERSITÉ**



Mémoire présenté en vue d'obtenir le diplôme :

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

de SORBONNE UNIVERSITÉ

Spécialité : Mathématiques

par

Oana IVANOVICI

Analyse des effets géométriques sur les équations dispersives

Soutenance prévue le 31 mars 2021, après avis de

Jean-Marc Delort, Professeur, Université Sorbonne Paris Nord

Daniel Tataru, Professeur, Université de Berkeley, Californie

Maciej Zworski, Professeur, Université de Berkeley, Californie

devant le jury composé de

Hajer Bahouri, Directrice de Recherches CNRS, Sorbonne Université

Nicolas Burq, Professeur, Université Paris Saclay

Jean-Marc Delort, Professeur, Université Sorbonne Paris Nord

Frank Merle, Professeur Université Cergy Pontoise

Christopher Sogge, Professeur, Université Johns Hopkins

Daniel Tataru, Professeur, Université de Berkeley, Californie

Nikolay Tzvetkov, Professeur Université Cergy Pontoise

Maciej Zworski, Professeur, Université de Berkeley, Californie

Remerciements

Je suis très reconnaissante à Jean-Marc Delort, Daniel Tataru et Maciej Zworski d'avoir rapporté sur ce manuscrit. Ils ont tous accepté spontanément ce travail et j'en suis très honorée.

Je remercie également chaleureusement Hajer Bahouri, Frank Merle, Nikolay Tzvetkov et Christopher Sogge d'avoir accepté de faire partie du jury d'habilitation.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Nicolas Burq : après avoir dirigé ma thèse, il a continué à me prodiguer conseils et encouragements.

Un grand merci à Gilles Lebeau d'avoir contribué, dès ma thèse, à m'orienter sur un sujet qui m'a passionné dès le début et que j'ai continué à développer ces dernières années. Collaborer avec Fabrice, Gilles et Richard a été un grand plaisir et a eu une influence déterminante sur mon travail.

Le LJLL est un endroit particulièrement propice pour travailler. Tous ses membres contribuent à la bonne ambiance qui y règne. Je remercie mes collègues pour leur disponibilité et leur bonne humeur. Merci à l'indispensable équipe du secrétariat de LJLL : Catherine Drouet, Malika Larcher et Salima Lounici. Un grand merci également à Chiara Soresi qui m'a beaucoup aidé dans la gestion de mes projets : merci pour sa compétence, sa gentillesse et sa disponibilité vis-à-vis de toutes les questions administratives rencontrées pendant plusieurs années avant mon arrivée au LJLL.

Enfin, je souhaite exprimer toute mon affection à ma famille, pour son soutien, ses conseils et sa confiance, et à ma fille, pour le bonheur qu'elle m'apporte tous les jours.

Liste des travaux de recherche

Travaux présentés dans ce mémoire (disponibles sur [ORCID](#), [HAL](#), [arXiv](#)) :

Les publications sont classées par ordre chronologique inverse et la numérotation est celle de la bibliographie finale. Chaque publication est disponible sur arXiv et les références ont un lien hypertexte pour consultation directe.

- [OI15], avec G. Lebeau, [Dispersive estimates for the wave and the Schrödinger equations outside a ball and counterexamples](#), 64p., soumis, 2021
- [OI14], [Long time dispersive estimates for the wave and Klein-Gordon equations inside strictly convex domains](#), 30p., soumis, 2021
- [OI13], avec R. Lascar, G. Lebeau et F. Planchon, [Dispersion estimates for the wave equation inside strictly convex domains II: the general case](#), 79p., soumis, 2020
- [OI12], [Dispersive estimates for the semi-classical Schrödinger equation in a strictly convex domain](#), 40p., soumis, 2020
- [OI11], avec G. Lebeau et F. Planchon, [Strichartz estimates for the wave equation inside strictly convex 2D model domain](#), 40p., soumis, 2020
- [OI10], avec G. Lebeau et F. Planchon, [New counterexamples to Strichartz estimates for the wave equation on a 2D model convex domain](#), 21p., soumis, 2020
- [OI9], avec G. Lebeau, [Dispersion for the wave and the Schrödinger equations outside strictly convex obstacles and counterexamples](#), C.R. Math.Acad. Sci. Paris, 355(7) :774-779, 2017
- [OI8], avec G. Lebeau et F. Planchon, [Estimations de Strichartz pour l'équation des ondes dans un domaine strictement convexe](#), In *PDE's, dispersion, scattering theory and control theory*, volume 30 of Sémin. Congr., Pub. de la SMF, 30 :69-79, 2017
- [OI7], avec G. Lebeau et F. Planchon, [Dispersion estimates for the wave equation inside strictly convex domains I: the Friedlander model case](#), Ann. of Math. (2), 180(1) :323-380, 2014
- [OI6], [Counterexamples to the Strichartz estimates for the wave equation in domains II](#), JEMS. 14(5) :1357-1388, 2012

Travaux non-présentés dans ce mémoire (issus de la thèse de doctorat)

- [OI5], avec F. Planchon, [Square function and heat flow estimates on domains](#), Comm. PDE, 42(9) :1447-1466, 2017
- [OI4], [Counterexamples to Strichartz estimates for the wave equation in domains](#), Math. Annal., 347(3) :627-673, 2010
- [OI3], avec F. Planchon, [On the energy critical Schrödinger equation in 3D non-trapping domains](#), Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non. Linéaire, 27(5) :1153-1177, 2010
- [OI2], [On the Schrödinger equation outside strictly convex domains](#), Analysis and PDE, 3(3) :261-293, 2010
- [OI1], [Precise smoothing effect in the exterior of balls](#), Asymptot. Anal., 53(4) :189-208, 2007

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Influence de la géométrie de l'espace	11
1.2	La propagation des singularités... et ses limites	14
1.3	Présentation succincte des questions abordées	15
1.4	L'équation des ondes (1.1)	16
1.5	L'équation de Schrödinger (1.2)	17
1.6	Résultats marquants	19
2	Équations des ondes dans un domaine strictement convexe	20
2.1	Dispersion optimale (d'abord cas modèle, ensuite convexe général)	20
2.1.1	Intégrales oscillantes et théorème de Melrose	23
2.1.2	Les quasimodes	25
2.2	Estimations en temps long pour les ondes dans le modèle de Friedlander et applications au flot de Klein-Gordon	28
2.3	Applications aux estimations de Strichartz	31
2.3.1	Premiers contre-exemples aux estimations de Strichartz (travaux [OI4, OI6])	31
2.3.2	Strichartz : perte $1/6$ [OI8]... ou moins [OI11]	33
2.3.3	Amélioration des contre-exemples existants [OI10]	40
2.4	Estimations de projecteurs spectraux dans un convexe strict	42
3	Equation de Schrödinger dans un domaine strictement convexe	43
3.1	Estimations de dispersion optimales pour l'équation semi-classique dans le domaine de Friedlander	45
3.2	Application aux inégalités de Strichartz	49
4	Equations des ondes et de Schrödinger dans des domaines extérieurs	50
4.1	Dispersion à l'extérieur d'une boule dans $\mathbb{R}^d$. Résultats positifs dans $\mathbb{R}^3$ et contre-exemples en dimension plus grande $d \geq 4$	52
4.1.1	Cadre général pour l'équation des ondes à l'extérieur d'une boule dans $\mathbb{R}^d$	53
4.1.2	Esquisse de la preuve du Théorème 12	54
4.1.3	Esquisse de la preuve du Théorème 13 à l'extérieur d'une boule dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 4$	59
4.1.4	Pour aller plus loin	61

1 Introduction

Ce mémoire a pour but de présenter des résultats que j'ai obtenus depuis la fin de ma thèse, en vue de l'obtention d'une habilitation à diriger des recherches.

De nombreux phénomènes physiques de type ondes sont modélisés par des équations aux dérivées partielles d'évolution. Je m'intéresse aux équations aux dérivées partielles de type ondes dans des milieux inhomogènes, dont les solutions admettent des propriétés de propagation permettant l'utilisation de méthodes issues de l'optique géométrique pour répondre aux questions qui se posent. Je souhaite comprendre comment la géométrie du milieu, et surtout la présence d'un bord (ou d'une interface) peuvent influencer la dispersion et la concentration des ondes et quel type d'ondes peut saturer les estimations correspondantes. Il s'agit donc d'étudier les interactions entre ces différents paramètres et leur effet sur les solutions : l'influence du bord se manifeste par des trajectoires de rayons lumineux qui peuvent se réfléchir au bord et engendrer des caustiques en très grand nombre (on ne cherche pas ici à définir précisément la notion de caustique : il s'agit d'un lieu où l'intensité lumineuse est singulièrement intense.) Comprendre ces questions est fondamental, notamment pour des questions théoriques liées à l'ergodicité quantique et à la localisation des fonctions propres du Laplacien, et également pour nombre d'applications pratiques (les deux facettes se rejoignent, par exemple quand on étudie la propagation dans une fibre optique où l'objectif est d'éviter de brûler la fibre tout en maintenant une excellente propagation sur de longues distances.)

Ainsi, je suis amenée à étudier des estimations mesurant la concentration ou l'étalement de fonctions propres, de quasimodes, et de solutions d'équations d'ondes, ainsi que des estimations de type dispersion / Strichartz en espace-temps, qui représentent des outils fondamentaux pour l'étude de modèles nonlinéaires. Intuitivement, on peut comprendre que l'énergie d'une onde suit les rayons lumineux, et ce phénomène peut être quantifié par des théorèmes dits de propagation des singularités, où la mesure est, naturellement, faite en norme L^2 localisée convenablement le long du flot dans l'espace des phases (de sorte que la "propagation des singularités" devient quantitativement la propagation de la régularité localisée en espace et en fréquence.) A contrario, la mesure de la dispersion d'une onde nécessite une information sur l'amplitude de l'onde aussi précise que possible (L^∞ , au mieux, en tout point de l'espace-temps), le taux de décroissance temporel de cette amplitude mesurant la dispersion et pouvant être relié, heuristiquement, à l'écartement des rayons.

Obtenir des estimations de dispersion optimales dans des domaines compacts nécessite d'abord de comprendre les phénomènes de concentration des fonctions propres qui peuvent apparaître près du bord. En effet, on peut envisager qu'une perte dans la dispersion est liée à la présence des caustiques, qui apparaissent lorsque des rayons optiques envoyés d'une même source (sous différents angles) cessent de diverger. D'autre part, pour montrer des estimations optimales pour les fonctions propres (ou les projecteurs spectraux), il est indispensable de comprendre le rôle joué par la géométrie du bord dans la façon dont les rayons se réfléchissent et se re-concentrent.

La plupart des équations de type ondes (hyperboliques, Schrödinger, KdV et autres modèles dispersifs non-linéaires) issues de modèles physiques représentent des phénomènes dans un milieu qui n'est que rarement homogène, et encore moins souvent infini. Près d'un demi-siècle a été nécessaire pour répondre à des questions simples sur des modèles jouet d'équations nonlinéaires où le milieu ambiant était le vide (l'espace entier avec une structure métrique plate). Ce n'est que récemment que l'influence de la géométrie du milieu a fait son apparition, à travers l'étude en géométrie courbe,

éventuellement compacte, peu régulière, des traditionnels modèles « jouet » non-linéaires. Ainsi, des développements récents ont permis de mieux comprendre les géométries courbes et les milieux inhomogènes, mais le plus souvent en l'absence de bord (ou d'interfaces entre deux media avec conditions de transmission), qui sont pourtant bien souvent les seules situations physiques réalistes (penser à la tranche d'une fibre optique multi-cœur).

Mes travaux et projets de recherche doivent permettre de mieux comprendre les problématiques classiques, existence et unicité de solutions, et surtout leur asymptotique (explosion en temps fini, scattering), en lien avec la géométrie du milieu ambiant (type de bord, obstacles multiples, interfaces ?). Ces questions ont été extrêmement étudiées dans le cadre de l'équation des ondes linéaire (motivées par le développement des radars/sonars, mais aussi de la tomographie), suscitant de spectaculaires développements d'analyse microlocale notamment dans les années soixante-dix, pour comprendre les phénomènes de propagation d'énergie le long des rayons ("la propagation des singularités"); et ces questions ont trouvé d'importantes applications, par exemple en théorie du contrôle, mais ces travaux déjà anciens ne sont que de peu d'utilité pour traiter les problématiques modernes, notamment nonlinéaires, où les effets de dispersion doivent être compris de manière beaucoup plus fine. Comprendre comment utiliser au mieux ces techniques, couplées à une analyse fine et adaptée aux questions non-linéaires des phénomènes de dispersion ou de focalisation, est une étape, parvenir à étendre à des contextes plus réalistes physiquement des outils spécifiquement non-linéaires mais mis au point dans le cadre rigide des modèles simples est une autre étape, l'une et l'autre nécessitant des développements concertés. Je suis persuadée que mes résultats récents (avec mes collaborateurs) à l'intérieur ainsi qu'à l'extérieur d'un domaine convexe vont nous aider à avoir une vision claire et complète de la dispersion dans des domaines à bord.

Commençons par un bref rappel d'une partie des développements antérieurs, qui s'étendent sur plus de trente ans d'activité. Les prototypes d'équations aux dérivées partielles hyperboliques et/ou dispersives sont les équations des ondes et de Schrödinger. Lorsqu'on s'intéresse aux équations non-linéaires d'évolution, il est crucial, pour amorcer l'étude non-linéaire, de disposer d'une bonne connaissance du flot linéaire, et plus particulièrement de ses propriétés dispersives qui se manifestent sous diverses formes (dispersion à temps fixé, effet régularisant ou décroissance locale de l'énergie, estimations de Strichartz qui sont des moyennes en temps, etc). Pendant longtemps, les résultats obtenus l'étaient dans le cadre "plat" de l'espace entier : en effet, des formules explicites sont alors disponibles pour l'étude de l'évolution linéaire et permettent d'établir ce type d'estimations. Plus récemment, des techniques ont pu être développées dans le cadre des variétés (citons les travaux pionniers de Bourgain sur le tore plat, puis pour des métriques variables, de Staffilani-Tataru, Burq-Gérard-Tzvetkov pour Schrödinger et de Smith, Bahouri-Chemin, Tataru, Klainerman-Rodnianski et Smith-Tataru pour les ondes). Pour les problèmes à bord, la situation reste loin d'être aussi bien comprise, et les difficultés qui apparaissent sont d'un ordre de magnitude plus élevé que dans le cas sans bord. On peut résumer la situation en disant que pour les ondes sur un domaine quelconque et pour Schrödinger sur des domaines extérieurs on n'a qu'une connaissance très imparfaite des propriétés dispersives des solutions linéaires et que pour Schrödinger sur des domaines bornés on ne dispose pas d'estimations satisfaisantes pour les applications (malgré des travaux d'Anton, Blair-Smith-Sogge, Planchon-Vega, Smith-Sogge, Planchon). En effet, les résultats les plus récents de Smith-Sogge et Blair-Smith-Sogge reposent en partie sur une réduction du problème à bord à une situation sans bord, mais avec une métrique seulement lipschitzienne le long d'une interface (le bord du modèle d'origine). Le caractère non optimal est alors lié, entre autres choses, à la faible régularité de la métrique ainsi produite et à une procédure de localisation en espace et en fréquence qui permet de ne considérer que des rayons

optiques traversant l'interface une unique fois (une seule réflexion au bord). Mais justement, les problèmes les plus difficiles, liés à la formation des caustiques en temps arbitrairement petit près du bord, apparaissent juste après la première réflexion au bord.

1.1 Influence de la géométrie de l'espace

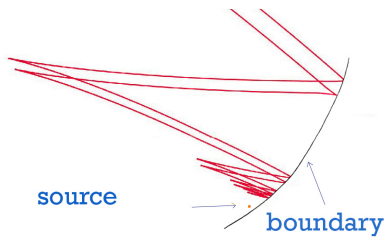
Rappelons le principe de Fermat : "un rayon de lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la durée du parcours soit stationnaire" (car "*la nature agit toujours par les voies les plus courtes*"). En d'autres termes, les rayons optiques suivent des *géodésiques*. On peut se demander ce qui se passe pour une onde : une réponse élégante est apportée par l'étude de la régularité des solutions de l'équation des ondes. On dit qu'un point appartient au support singulier d'une fonction f s'il n'y a pas de voisinage de ce point sur lequel $f \in C^\infty$. Un "raffinement" du support singulier est le front d'onde (WF), qui mesure où f est singulière et dans quelle direction. Il est important de noter qu'en pratique, ce qui est intéressant en vue des applications est une forme de quantification convenable de la propagation de la régularité plutôt que des singularités.

Dans le cas d'un domaine Ω à bord, pour les problèmes qui nous intéressent la difficulté principale vient du comportement des singularités au voisinage d'un point du bord. À l'intérieur de l'ouvert, ces singularités se propagent le long des rayons optiques. Après les travaux pionniers de Morawetz, Ralston, Morawetz-Ralston-Strauss (tous motivés par des problématiques de tomographie, liées aux sonars ou aux radars), l'étude de la propagation au bord a été clarifiée notamment dans les travaux de Melrose et Sjöstrand qui ont introduit la notion de *rayon bicaractéristique généralisé*, généralisant celle de rayon optique. Le cas le plus simple, correspondant aux lois, classiques, de l'optique géométrique, est celui des points pour lesquels le flot est transverse au bord (appelés *points hyperboliques*). Des difficultés apparaissent près des points où les rayons sont tangents au bord. Les points dits *diffractifs* sont ceux par lesquels passe un rayon optique qui frôle le bord sans être dévié. Pour décrire correctement la propagation, il faut également considérer des rayons qui restent dans le bord de Ω , appelés rayons *glissants*, et les limites des rayons se rapprochant du bord et se réfléchissant un grand nombre de fois. La projection spatiale d'un tel rayon est une géodésique du bord.

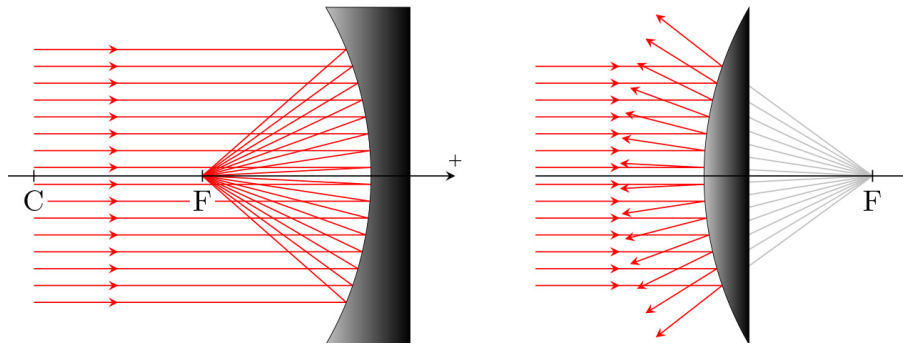


L'exemple le plus simple est la propagation d'une onde sphérique, dont les singularités sont (précisément, en dimension impaire, et principalement, en dimension paire) localisées sur la sphère de rayon $|t|$ (où t désigne le temps écoulé), centrée au point source. Pour une métrique à coefficients variables, cet argument heuristique peut être utilisé tant que deux rayons optiques issus d'une même source et suivant des directions différentes ne se croisent pas ; en d'autres termes, tant que le temps t est plus petit que le rayon d'injectivité.

On peut alors construire des solutions approchées (qu'on appellera *paramétriques*) pour l'équation des ondes sur de petits intervalles de temps en utilisant des intégrales oscillantes dont les phases (non-dégénérées) "captent" la géométrie du front d'onde.

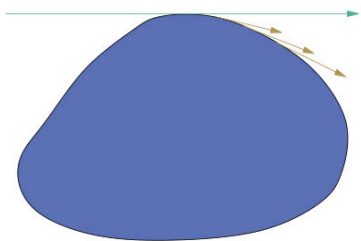


Dans le cas d'un domaine à bord, le front d'onde peut subir des changements spectaculaires par rapport au cas plat, à cause des réflexions multiples sur la surface du bord qui peuvent engendrer des caustiques et des points de concentration (où la lumière est particulièrement intense) : l'image à gauche représente une partie du front d'onde après seulement cinq réflexions sur un bord convexe.



— A l'intérieur d'une parabole : la taille de l'onde diminue et sa norme L^∞ augmente. Pour comprendre les effets dispersifs il devient indispensable de comprendre la géométrie du front d'onde. On distingue plusieurs situations :

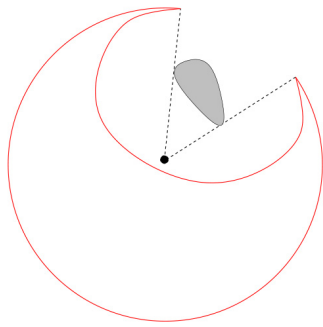
- rayon transverse : le rayon se réfléchit selon les lois de l'optique géométrique, l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion, comme une boule de billard ; cette situation est de loin la plus simple.
- rayon tangent à un obstacle strictement convexe : un rayon peut "s'accrocher" au bord et "transporter" de l'énergie près de la zone d'ombre, produisant des effets diffractifs (exemple réel : le point de Poisson-Arago en physique !);



Dans ce cas il n'y a pas de singularités géométriques dans le front d'onde (le WF ressemble à celui d'une onde dans le demi-espace) **mais** il peut y avoir de forts effets diffractifs...

Source : J.Wunsch, Séminaire L.Schwartz

Le front d'onde à l'extérieur d'un obstacle strictement convexe ressemble au front d'onde dans le demi-espace $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$ avec la métrique plate, comme illustré ci-dessous où



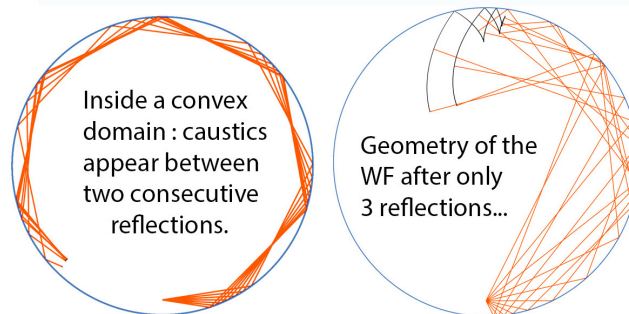
le front d'onde consiste en :

- (une partie de) **front circulaire** correspondant aux rayons propagés dans des directions qui ne rencontrent pas le bord ;
- une partie correspondant **aux rayons réfléchis** (une fois) en accord avec les lois de l'optique géométrique.

Source : J.Wunsch, Séminaire L.Schwartz

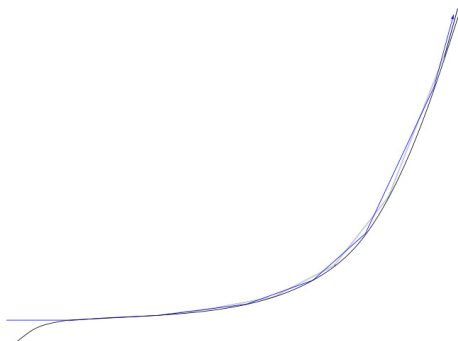
Notons qu'il n'y a **pas de singularités** derrière l'obstacle dans la "*région d'ombre*" (ceci est une conséquence directe de la construction de solution approchée par Melrose et Taylor).

- rayon multi-réfléchi à l'intérieur d'un convexe strict : la "sphère" de rayon $|t|$, i.e. le lieu des points atteints après un temps t en suivant les géodésiques généralisées, peut vite dégénérer et faire apparaître des singularités en temps arbitrairement petit, dépendant de la fréquence et de la distance de la source au bord ;



Dans ce cas il y a un nombre arbitrairement grand de singularités (cusps et queues d'arondes) dans le front d'onde. Dans [OI7] on obtient le premier résultat qui donne une description de l'amplitude de l'onde correspondant à la solution fondamentale après un nombre infiniment grand de réflexions .

- rayon tangent au bord avec contact d'ordre ≥ 3 : Si le contact est d'ordre ∞ , même *décider* ce qui devrait constituer la continuation d'un rayon qui touche le bord est un problème en soi...



Ici on peut distinguer sur l'exemple de Taylor (1976) plusieurs continuations possibles d'un rayon donné qui touche un bord à un point de contact d'ordre infini.

Dans ce cas, jusqu'à très récemment, l'unique approche était la réduction classique à une situation sans bord (décrite dans la suite). Dans ce cas :

- Mon ancien étudiant, Len Meas, a obtenu dans sa thèse (soutenue en 2017) des résultats optimaux de dispersion pour les ondes à l'intérieur d'un cylindre (donc avec des points du bord où la courbure s'annule), ce qui représente un premier travail de ce genre.
- Avec mon post-doctorant, Felice Iandoli, nous étudions le cas de l'extérieur d'un cylindre dans $\mathbb{R}^3$.

1.2 La propagation des singularités... et ses limites

Un des résultats les plus remarquables de l'analyse microlocale a été le théorème de propagation de singularités (près du bord) de Melrose-Sjöstrand. Ce théorème nous dit que les singularités se propagent le long du flot bicaractéristique généralisé. La motivation principale (ainsi que naturelle) de ce résultat a été bien sûr la théorie du scattering et trouve son origine dans les travaux pionniers de Morawetz, mais il s'avère que le théorème de Melrose et Sjöstrand a eu d'importantes applications en théorie du contrôle, car il représente un des deux ingrédients principaux du théorème de Bardos, Lebeau et Rauch sur la contrôlabilité exacte des ondes linéaires dans un domaine.

Cependant, la propagation de singularités, basée entièrement sur des arguments d'énergie, même microlocaux, ne donne pas une description détaillée de la structure analytique des singularités. Une telle description précisée pourrait, en principe, être obtenue à l'aide d'une *paramétrice* (i.e. une solution approchée) appropriée, mais il est clair qu'à l'époque, des paramétrices suffisamment "précises" près d'un point arbitraire du bord étaient hors de portée (les points de contact d'ordre 3 ou plus ne sont, à ce jour, toujours pas bien compris...); par conséquent, les solutions approchées pour le problème à bord (dans certains cas, disponibles depuis très longtemps) **n'ont pas d'utilité lorsqu'on essaie de comprendre les effets dispersifs** car elles ne saisissent pas de façon optimale la séparation des paquets d'ondes qui se propagent selon des directions différentes. En fait, même dans le cas plat, la propagation des singularités, dans sa quantification "classique", est loin d'être suffisante pour démontrer la dispersion :

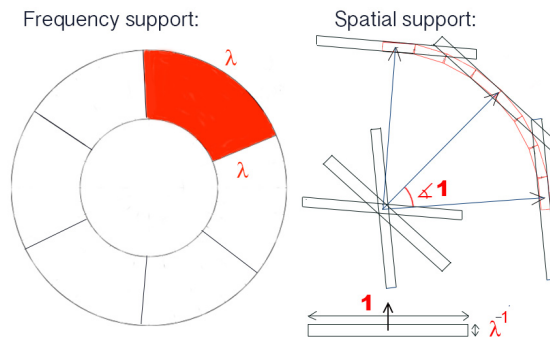


Fig. : Propagation "classique" : l'énergie microlocalisée dans une boîte physique de largeur 1 (et longueur l'inverse de la fréquence) est transportée selon un cône de directions d'aperture 1. Même dans $\mathbb{R}^d$ cela ne suffit pas pour montrer la dispersion, car le lien entre l'amplitude d'un paquet et son énergie correspond à l'injection de Sobolev, et la séparation physique éventuelle n'est d'aucune utilité.

On a besoin d'échelles optimales à un niveau de précision qui est celui du principe d'incertitude et d'informations géométriques sur la façon dont ces paquets se séparent, en d'autres termes de *raffinements quantitatifs* concernant la propagation des singularités, ce qui représenterait un outil *crucial* pour les applications aux problèmes non-linéaires dispersifs, ainsi que pour la théorie du contrôle.

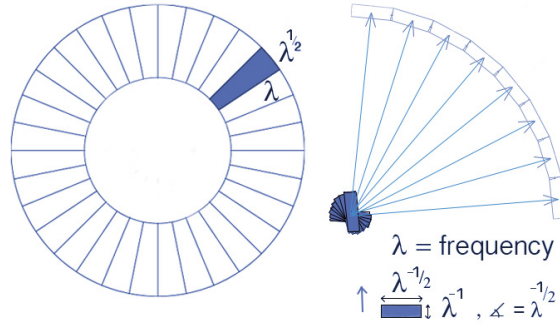


Fig. : Ce qu'on souhaite : échelles optimales selon le principe d'incertitude de Heisenberg (on fait "mieux" que l'injection de Sobolev sur un paquet), ainsi qu'une information géométrique sur la façon dont les paquets (transportés selon des directions différentes) se séparent.

Puisque les solutions approchées (pour les problèmes à bord) existantes ne permettaient pas d'obtenir des réponses aux questions sur les effets dispersifs, une technique particulière a été mise en place (souvent avec succès). En fait, les méthodes semi-classiques permettent le travail dans des coordonnées de carte locale avec des données localisées spectralement. La présence du bord rend plus difficile la mise en place de cette méthode : en faisant une symétrie par rapport au bord avec des coordonnées transverses, on se ramène au cas d'une variété C^1 sans bord. La métrique est ensuite prolongée de façon symétrique par rapport au bord.

Ainsi, sur des domaines à bord général il y a eu des progrès très importants en particulier grâce aux travaux de Hart Smith et Christopher Sogge [35]. Tous ces résultats positifs sont basés sur cette réduction astucieuse d'un problème à bord avec métrique régulière à un problème *sans bord* mais avec une *métrique Lipschitz le long d'une interface* (l'ancien bord) et utilisent ensuite une machinerie développée au départ pour des métriques à faible régularité (en lien avec les équations des ondes quasilineaires et Einstein en particulier, voir [37], [30], [31]) et pour des questions liées aux projecteurs spectraux. A l'aide des localisations microlocales appropriées, ce type de construction permet de se "débarrasser" des rayons réfléchis plusieurs fois au bord : on finit par travailler sur des intervalles de temps (parfois) très petits, dépendant de la fréquence du paquet d'onde qu'on considère, de telle manière que les rayons qu'on regarde ne se réfléchissent *qu'une seule fois* au bord.

Cependant, **les caustiques** (les points de concentration des rayons où la lumière est particulièrement intense) **apparaissent** (près d'un point d'un bord strictement convexe par exemple) **juste après la première réflexion au bord**. En microlocalisant un problème pour se réduire à des paquets d'ondes qui ne traversent l'interface le long de laquelle la nouvelle métrique devient Lipschitz (l'ancien bord) qu'une seule fois, on peut traiter *tout domaine à bord* (et, en particulier, la situation la plus difficile des points de contact d'ordre infini) **mais** on n'a *aucune visibilité des effets dispersifs dans les variables tangentielles* (ce qui fait qu'en dimensions $d \geq 3$ on ne peut espérer un résultat optimal).

1.3 Présentation succincte des questions abordées

On s'intéresse donc aux propriétés dispersives des solutions d'équations aux dérivées partielles hyperboliques, dont les prototypes sont les équations des ondes et de Schrödinger.

Les estimations dispersives dites "de Strichartz" mesurent la taille et la dispersion des solutions de l'équation des ondes linéaire sur un domaine Ω avec bord $\partial\Omega$ (possiblement vide) :

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u(t, x) = 0, & x \in \Omega \\ u|_{t=0} = u_0, \quad \partial_t u|_{t=0} = u_1, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Ici Δ désigne l'opérateur de Laplace-Beltrami sur Ω . Si $\partial\Omega \neq \emptyset$, on considère donc la condition de Dirichlet (un certain nombre de nos résultats peuvent être étendus au cas de la condition de Neumann).

Les inégalités de Strichartz peuvent aussi concerner la version quantique de (1.1), c'est à dire de l'équation de Schrödinger

$$\begin{cases} (i\partial_t + \Delta)v(t, x) = 0, & x \in \Omega \\ v|_{t=0} = v_0, \\ v|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Pour pouvoir perturber ces équations et étudier les problèmes non-linéaires associés, avoir un contrôle de la "taille" du flot linéaire en termes de la taille des données initiales s'avère crucial. Pour l'équation des ondes non-linéaires ou l'équation de Schrödinger non-linéaire, les normes mixtes $L_t^q L^r(\Omega)$ sont particulièrement utiles : au prix d'une moyenne en temps on gagne de l'intégrabilité en espace, parfois jusqu'à $r = \infty$, pour des données qui ont une régularité Sobolev qui ne les placerait pas dans $L^r(\Omega)$ par simple injection de Sobolev.

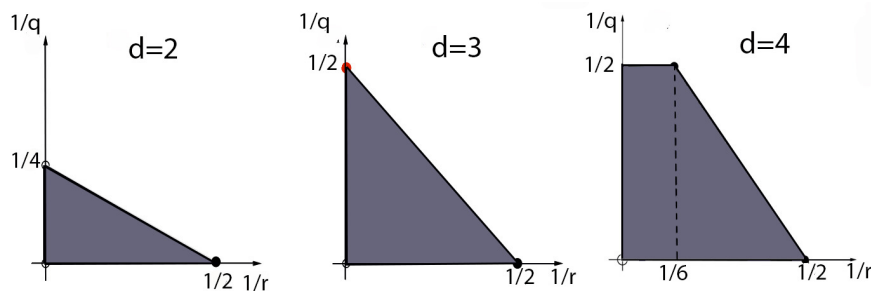
1.4 L'équation des ondes (1.1)

Une estimation (locale) classique indique que sur toute variété Riemannienne Ω sans bord, la solution linéaire de (1.1) vérifie (pour $T < \infty$)

$$h^\beta \|\chi(hD_t)u\|_{L^q([0,T], L^r(\Omega))} \leq C \left(\|u_0\|_{L^2} + \|hu_1\|_{L^2} \right), \quad (1.3)$$

où $\chi \in C_0^\infty$ est une fonction lisse à support inclus dans un voisinage de 1 ($\chi(hD_t)$ est donc un multiplicateur de Fourier dans la variable temporelle, qui, sur la solution des ondes, est également une troncature spectrale). Si d désigne la dimension de la variété, β est donné par la condition d'échelle $\beta = d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{q}$, où le couple (q, r) est dit admissible pour l'équation des ondes, c.a.d. :

$$\frac{2}{q} + \frac{d-1}{r} \leq \frac{d-1}{2}, \quad q \geq 2, \quad (d, q, r) \neq (3, 2, \infty). \quad (1.4)$$



Lorsque l'égalité a lieu dans (1.4), la paire (q, r) est dite strictement admissible. Si (1.3) a lieu pour $T = \infty$, on parle d'inégalité de Strichartz globale en temps. Ces estimations ont été étudiées depuis bien longtemps dans l'espace de Minkowski (métrique plate) : si Ω désigne l'espace $\mathbb{R}^d$ avec la métrique euclidienne $g_{i,j} = \delta_{i,j}$, la solution $u_{\mathbb{R}^d}(t, x)$ de (1.1) dans $\mathbb{R}^d$ avec $(u_0 = \delta_a, u_1 = 0)$ a une forme explicite donnée par la formule

$$u_{\mathbb{R}^d}(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \cos(t|\xi|) e^{i(x-a)\xi} d\xi.$$

L'inégalité (1.3) a été démontrée par R.H.Strichartz [36] dans le cas particulier $q = r$ et ensuite établie par J.Ginibre et G.Velo [7, 9] pour des paires admissibles (q, r) avec $q > 2$ (voir également H.Lindblad et C.Sogge [19], ainsi que L.Kapitanski [11] dans le cas d'une métrique variable). Le point limite $q = 2$ a été montré par M.Keel et T.Tao [13]. En dimension $d = 3$, les paires extrémales ne sont pas admissibles et l'estimation (1.3) est fautive : on obtient une perte logarithmique de dérivées dans les estimations de Strichartz.

Le chemin canonique pour démontrer (1.3) est d'utiliser une estimation plus forte, à temps fixé, qu'on appelle estimation de dispersion :

$$\|\chi(hD_t)u_{\mathbb{R}^d}(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C(d)h^{-d} \min\{1, (h/t)^{\frac{d-1}{2}}\}. \quad (1.5)$$

L'interpolation entre (1.5) et l'estimation de l'énergie, suivie d'un argument classique de dualité dit TT^* , permet d'obtenir facilement les estimations (1.3) (pour $q > 2$). Ces estimations peuvent être généralisées à toute variété (Ω, g) régulière sans bord grâce à leur caractère local (vitesse de propagation finie). Les estimations (1.3) sont optimales sur une telle variété Riemannienne.

1.5 L'équation de Schrödinger (1.2)

Dans le cas de l'équation de Schrödinger (1.2), les estimations de Strichartz locales s'écrivent, dans leur plus grande généralité, comme suit : si on note $e^{it\Delta}$ le flot linéaire, il vérifie

$$\|e^{it\Delta}v_0\|_{L^q(0,T)L^r(\Omega)} \leq C_T\|v_0\|_{H^\sigma(\Omega)}, \quad (1.6)$$

où $2 \leq q, r \leq \infty$ vérifient la condition d'admissibilité pour Schrödinger,

$$\frac{2}{q} + \frac{d}{r} = \frac{d}{2}, \quad (d, q, r) \neq (2, 2, \infty), \quad \sigma \geq 0. \quad (1.7)$$

Si on se place dans le cadre $\Omega = \mathbb{R}^d$ avec métrique plate alors, grâce à la transformée de Fourier, on obtient la forme exacte de la solution de (1.2)

$$v_{\mathbb{R}^d}(t, x) = \frac{1}{4\pi i |t|^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i \frac{|x-y|^2}{4t}} v_0(y) dy. \quad (1.8)$$

L'inégalité de Strichartz pour l'équation de Schrödinger (1.2) s'écrit comme suit : soit (q, r) une paire d -admissible pour l'équation de Schrödinger en dimension $d \geq 2$. Si $v_{\mathbb{R}^d} = e^{it\Delta_{\mathbb{R}^d}}v_0$ est solution de (1.2) avec donnée initiale $v_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|v_{\mathbb{R}^d}\|_{L^q(\mathbb{R}, L^r(\mathbb{R}^d))} \leq C\|v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (1.9)$$

Grâce à l'invariance de l'équation linéaire par le changement d'échelle $(t, x) \rightarrow (h^{-2}t, h^{-1}x)$, on déduit de (1.2) que la condition (1.7) sur le couple (q, r) est nécessaire.

Les inégalités de Strichartz pour l'équation de Schrödinger dans le contexte classique ont été établies par R.H.Strichartz et généralisées par J.Ginibre et G.Velo [7, 8], T.Kato [12], T.Cazenave et F.Weissler [6], etc, qui les ont ensuite utilisées pour montrer des résultats d'existence globale pour l'équation semi-linéaire avec non-linéarité polynomiale. Comme pour l'équation des ondes, elles se démontrent à partir de l'inégalité de dispersion

$$\|v_{\mathbb{R}^d}(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C|t|^{-d/2}\|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}, \quad (1.10)$$

qui se déduit facilement dans le cas euclidien de la forme explicite (1.8) de v ; on utilise ensuite la conservation de l'énergie, le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin et l'argument TT*.

Dans la suite, un intérêt particulier sera accordé aux estimations de dispersion de type (1.5) et (1.10) (laquelle, dans sa version semi-classique, prend la forme (3.4)) sur des domaines à bord. On souhaite comprendre comment la géométrie, la régularité de la métrique et surtout la présence du bord peuvent influencer ces estimations. Traditionnellement, en physique, la dispersion est le phénomène affectant une onde se propageant dans un milieu dit "dispersif", c'est-à-dire dans lequel les différentes longueurs d'onde constituant l'onde ne se propagent pas à la même vitesse, tout en gardant son énergie constante. Ici on utilise le vocabulaire dispersif indifféremment pour Schrödinger (où la vitesse de propagation dépend de la longueur d'onde) et pour l'équation des ondes (où la vitesse de propagation est l'unité et où la dispersion n'intervient donc que transversalement : il n'y a pas de dispersion pour l'équation des ondes en dimension un d'espace). L'énergie portée par l'onde est reliée à l'amplitude qui est mesurée par la dispersion. En présence d'une interface, ou, encore pire, d'un bord, ces estimations ne peuvent plus être vérifiées comme dans l'espace libre car les rayons optiques issus d'une même source peuvent se re-concentrer et donner naissance à des caustiques. Comprendre les propriétés de dispersion d'une onde demande une connaissance approfondie de la géométrie du front d'onde, qui peut très vite dégénérer et donner naissance à un nombre important de singularités (on l'a illustré précédemment sur l'exemple d'un bord strictement convexe). En particulier, une singularité dans le front d'onde devrait induire des "pertes" dans la dispersion (par rapport aux estimations de l'espace libre). Cependant, comprendre le front d'onde n'est pas forcément suffisant : les rayons peuvent adhérer au bord et relâcher de l'énergie près de la "zone d'ombre", en produisant des effets diffractifs (comme le point de Poisson - Arago au centre de l'ombre derrière un obstacle sphérique illuminé par un onde plane monochromatique).

Historique

Les résultats sus-mentionnés pour $\mathbb{R}^d$ ou des variétés sans bord ont été établis il y a un certain nombre d'années, grâce aux formules explicites disponibles pour l'évolution linéaire. Quant aux variétés sans bord, la vitesse finie de propagation permet de travailler dans une carte locale et de se réduire ainsi à démontrer des estimations pour des opérateurs à coefficients variables dans $\mathbb{R}^d$. Pour des coefficients $C^{1,1}$, des estimations de Strichartz optimales ont été obtenues dans la travail de H.Smith [30]. En dessous de ce seuil de régularité une perte de dérivée est inévitable (voir D.Tataru [37] pour des métriques C^α).

Pour les problèmes à bord, la situation reste loin d'être aussi bien comprise. On peut résumer la situation en disant que pour les ondes sur un domaine quelconque et pour Schrödinger sur des domaines extérieurs on n'a qu'une connaissance très imparfaite des propriétés dispersives des solutions linéaires et que pour Schrödinger sur des domaines bornés on ne dispose pas d'estimations satisfaisantes pour les applications les plus intéressantes.

Même si le cas sans bord a été très bien compris depuis un certain temps, l’obtention de tels résultats sur des variétés à bord s’avère être une tâche bien plus difficile. Pour des variétés à bord strictement concave, des résultats ont pu être établis grâce à la paramétrice de R.Melrose et M.Taylor près de rayons tangents au bord. Par contre, dès que l’hypothèse de stricte concavité du bord est enlevée, la présence des rayons géodésiques multi-réfléchis et de leurs limites, les rayons glissants, rend l’étude de ces problèmes particulièrement difficile.

1.6 Résultats marquants

Depuis la fin de ma thèse, j’ai entamé un programme à long terme d’étude systématique des propriétés dispersives de l’équation des ondes sur des domaines à bord, en collaboration notamment avec Fabrice Planchon et Gilles Lebeau. Nos premiers résultats [OI7], qui traitent un modèle de convexe strict, mettent en évidence une perte par rapport au cas sans bord, due à la présence de caustiques de type queue d’aronde dans la propagation du front d’onde. Ces résultats, ainsi que leur généralisation [OI13] au cas d’un domaine strictement convexe générique représentent une avancée majeure dans la compréhension de la dispersion pour les ondes, avec une analyse microlocale fine de la propagation d’une onde près d’un bord, qui conduisent à des estimations optimales sur la fonction de Green associée (et donc, sur l’amplitude de l’onde associée). Il s’agit de la première construction d’une paramétrice à ce niveau de précision, permettant d’obtenir des résultats optimaux malgré la présence d’un nombre arbitrairement élevé de caustiques (singularités géométriques du front d’onde). Ce travail est la base d’un effort à plus long terme pour parvenir à une compréhension complète des estimations dispersives dans les domaines à bord quelconques (avec l’objectif, qui reste à atteindre, d’utiliser cette connaissance pour diverses applications importantes, notamment en contrôle).

Au delà de la dispersion, il est souhaitable d’obtenir des estimations de Strichartz optimales, dépassant potentiellement celles conjecturées par Hart Smith et Chris Sogge, tout en complétant les contre-exemples existants que j’avais obtenus précédemment. Avec Fabrice Planchon et Gilles Lebeau, nous avons montré que la perte dans la dispersion (à temps fixé) pour les ondes dans un convexe strict, due à la présence des singularités de type queue d’aronde dans le front d’onde, n’est pas l’élément limitant dans les estimations de Strichartz pour les ondes : les singularités sont isolées en temps (mais il y en a de plus en plus souvent en s’approchant du bord) et on peut, en moyennant convenablement, obtenir des estimations meilleures que celles qui étaient attendues, [OI8]. Là encore, il n’existait aucun résultat comparable auparavant. Nous avons ensuite amélioré ces résultats, en raffinant la construction de notre premier travail [OI11] et en améliorant par ailleurs les contre-exemples existants [OI10] par une utilisation judicieuse de la paramétrice. Ces travaux devraient être utiles, au delà des estimations dispersives, puisque la construction de la paramétrice est un outil puissant qui peut permettre d’obtenir, entre autres, des résultats de propagation de singularités précisée, qui, jusqu’à maintenant, étaient hors de portée.

Par ailleurs, notre étude doit s’appliquer également à l’étude des projecteurs spectraux, qui dépasse le domaine des EDPs et rejoint des questions d’actualité sur la localisation des fonctions propres (avec en lointaine ligne de mire les conjectures d’ergodicité quantique). Pour aller plus loin, on a également observé un lien important avec une question très délicate de théorie des nombres, qui reste à explorer.

D’autre part, l’étude de la diffraction à l’extérieur d’un convexe strict a une longue tradition en physique et mathématiques appliquées et remonte aux travaux de Fresnel sur la diffraction (au coeur desquels se trouve le principe de Huygens et Fresnel), qui ont joué un rôle essentiel dans le triomphe de la théorie ondulatoire de la lumière. Il y a ensuite une longue lignée de travaux qui ont contri-

bué à la compréhension de ce sujet, parmi lesquels on doit mentionner ceux de Kirchhoff, Watson, Fock, Friedlander, Keller, Buslaev, Nussenzweig, Ludwig, Babich. Hörmander a fait de l'optique géométrique une "branche" des mathématiques fondamentales, en fournissant des outils puissants et en clarifiant certains concepts. Pour le citer, "a wealth of others ideas" de l'optique géométrique ont été ensuite exploitées par Melrose, Taylor, Andersson, Sjöstrand et Ivrii dans leurs travaux sur la propagation de singularités pour les problèmes à bord.

Plusieurs résultats positifs (et optimaux) sur les effets dispersifs ont été démontrés récemment à l'extérieur d'un convexe strict (Strichartz, projecteur spectraux, etc) : cependant, la question de savoir si les estimations de dispersion étaient vraies ou non est restée entièrement ouverte, même à l'extérieur d'une sphère (et cela, au moins depuis les travaux de Smith et Sogge [34]). Puisqu'il n'y a pas de concentration apparente d'énergie, comme dans le cas d'un domaine non-captant quelconque (pour lequel les portions concaves du bord peuvent agir comme des miroirs et re-focaliser les paquets d'ondes) on pourrait raisonnablement penser que les estimations de dispersion devraient être vérifiées à l'extérieur d'un convexe (seul un cas particulier avait été traité, à l'extérieur d'une sphère de $\mathbb{R}^3$ dans le cas des fonctions à symétrie sphérique [18]). Dans le travail récent [OI9], [OI15] en collaboration avec Gilles Lebeau nous apportons une réponse positive à cette question en dimension 3, ainsi que des contre-exemples (assez surprenants) qui apparaissent au point de Poisson-Arago en dimension plus grande.

2 Équations des ondes dans un domaine strictement convexe

Dans cette section je vais brièvement décrire les résultats obtenus pour l'équation des ondes à l'intérieur d'un domaine strictement convexe (sur un cas modèle d'abord, suivi de la généralisation au cas d'un convexe strict quelconque).

2.1 Dispersion optimale (d'abord cas modèle, ensuite convexe général)

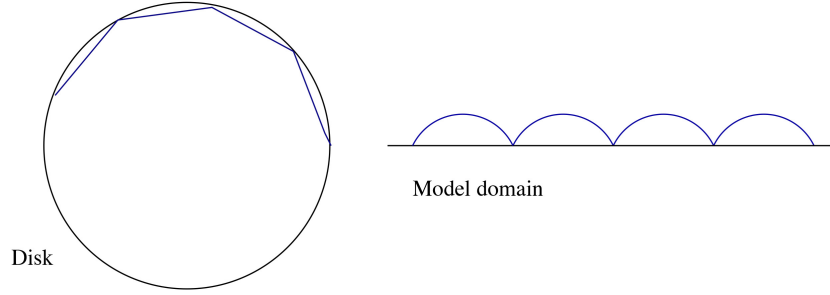
Nous avons souhaité approfondir notre compréhension des phénomènes de dispersion pour les domaines à bord, en combinant une analyse fine de la géométrie des cônes d'onde (rendue difficile par les réflexions multiples) et des arguments délicats de nature microlocale développés à l'origine pour la propagation des singularités. Nous avons commencé par regarder le cas du domaine particulier de Friedlander, strictement convexe, défini par le demi-espace

$$\Omega_d = \{(x, y) | x > 0, y \in \mathbb{R}^{d-1}\}$$

et muni de la métrique g_F héritée de l'opérateur de Laplace suivant :

$$\Delta_F = \partial_x^2 + (1+x)\Delta_{\mathbb{R}_y^{d-1}}.$$

On s'aperçoit facilement que (Ω_d, g_F) modélise localement un domaine strictement convexe : en effet, (Ω_d, g_F) peut être regardé comme un modèle simplifié du disque unité $D(0, 1)$ après le passage en coordonnées polaires (r, θ) , avec $r = 1 - x/2$, $\theta = y$.



Nous avons d'abord montré que, dans le domaine de Friedlander, une perte par rapport à l'estimation de dispersion libre (1.5) est inévitable, et cela apparaît en raison de la présence de caustiques de type queue d'aronde dans le support singulier de u .

Théorème 1. ([OI7]) Il existe une constante $C(d) > 0$ tels que pour tous $a \in (0, 1]$, $h \in (0, 1)$ et $t \in (0, 1]$ la solution $u_a(t, x, y) = \cos(t\sqrt{|\Delta_F|})(\delta_{x=a, y=0})$ de (1.1) (avec Δ remplacé par Δ_F) vérifie

$$|\chi(hD_t)u_a(t, x, y)| \leq C(d)h^{-d} \min\{1, (h/t)^{\frac{d-2}{2}} \gamma(t, h, a)\}, \quad (2.1)$$

où

$$\gamma(t, h, a) = \begin{cases} (\frac{h}{t})^{1/2} + h^{1/3} + a^{1/4}(\frac{h}{t})^{1/4}, & \text{si } a \geq h^{4/7-\epsilon} \\ (\frac{h}{t})^{1/3} + h^{1/4}, & \text{si } a \leq h^{1/2}. \end{cases}$$

De plus, il existe une suite de temps $t_n = 4n\sqrt{a}\sqrt{1+a}$ pour lesquels on a égalité dans (2.1).

Remarque. L'estimation (2.1) nous dit que dans un domaine strictement convexe on perd une puissance $\frac{1}{4}$ dans l'exposant de h par rapport à l'estimation (1.5) de l'espace libre, en lien avec des phénomènes microlocaux comme les caustiques générées en temps arbitrairement petit près du bord. Ces caustiques apparaissent lorsque les rayons optiques envoyés d'une même source dans des directions différentes cessent de diverger. Sur l'illustration qui suit, il faut penser à ξ_3 comme le temps (s'écoulant de droite à gauche), ξ_1 comme la variable tangentielle y et ξ_2 comme la variable normale x , le front d'onde étant la coupe dans le plan (ξ_1, ξ_2) (se déplaçant dans la direction ξ_1 mais recentré sur l'axe ξ_3).

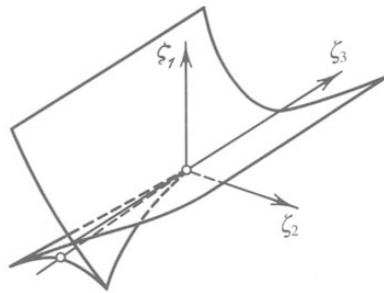


Fig. : Bifurcation pour une queue d'aronde. Source : Y. A. Kravtsov et al., Caustics, "Catastrophes and Wave Fields", 1999

Un point essentiel de la preuve consiste en une description précise de la géométrie des ondes "sphériques", la "sphère" étant ici un objet singulier en raison des multiples réflexions, comme dans l'image ci-dessus où on aperçoit une partie du front d'onde (a) juste après la première réflexion; (b) juste avant le premier point de concentration la courbure change; (c) au premier moment de concentration la première queue d'aronde apparaît; (d) après deux réflexions; (e) après la 3ème réflexion... lorsque le nombre de réflexions au bord augmente, la géométrie du front d'onde devient compliquée en raison du grand nombre de singularités.

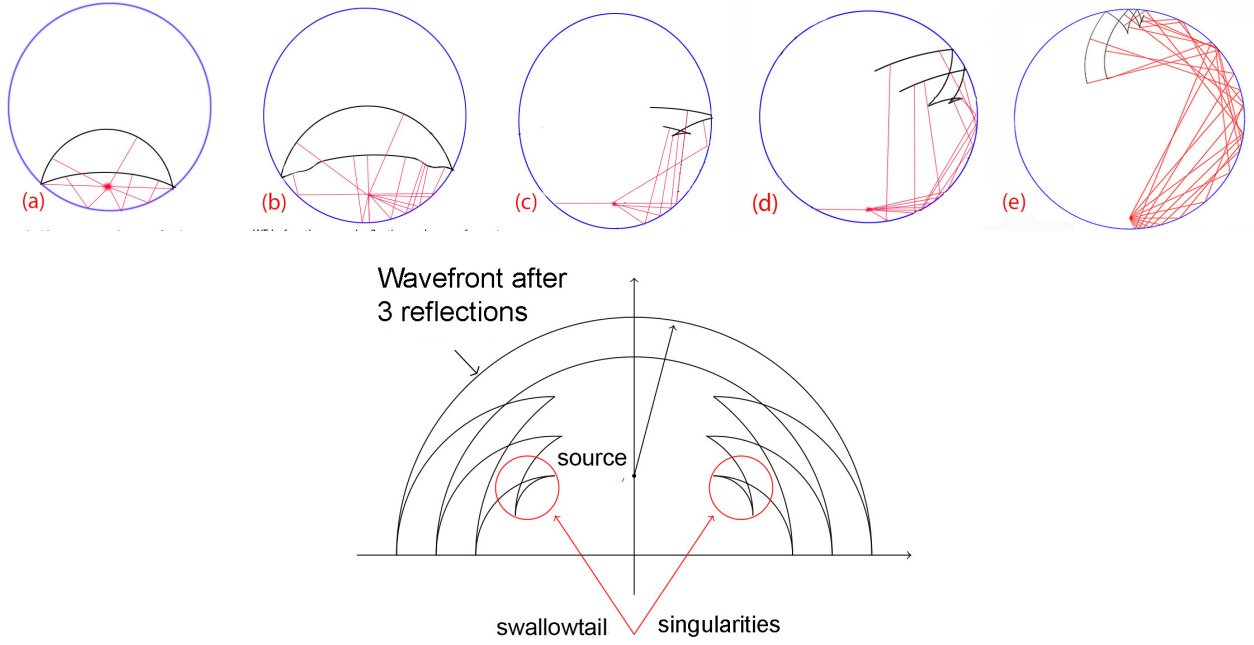


Fig. On aperçoit le front d'onde après trois réflexions au bord lorsque le bord a été aplati (cela correspond au cas (e) de l'image précédente).

La démonstration fournit une analyse assez détaillée de la fonction de Green des ondes, au moins dans certains régimes. En effet, la construction des paramétrices microlocales utilisée pour obtenir les contre-exemples précédemment évoqués semble instable dans une zone intermédiaire près du bord. Dans ce régime (absent du contre-exemple), l'estimation de dispersion est obtenue par injection de Sobolev, en remarquant que le flot préserve essentiellement la taille du microsupport, alors que dans le régime de la paramétrice microlocale, construite de réflexion en réflexion, c'est une phase stationnaire dégénérée d'une intégrale oscillante (de type Airy voire Pearcey autour de la queue d'aronde) qui donne les estimations.

Pour $a > 0$, si $\delta_{x=a}$ désigne la distribution de Dirac sur $\mathbb{R}_+$, elle s'écrit comme une somme de modes de galerie e_k de la façon suivante

$$\delta_{x=a} = \sum_{k \geq 1} e_k(x, \theta) e_k(a, \theta), \quad (2.2)$$

où e_k désignent les fonctions propres $Ai(|\theta|^{2/3}x - \omega_k)$ (avec un facteur de normalisation dans L^2) du Laplacien de Friedlander Δ_F (qui, après transformation de Fourier en y , est donné par $-\partial_x^2 + (1+x)\theta^2$), associées aux valeurs propres $\lambda_k(\theta) = |\theta|^2 + \omega_k|\theta|^{4/3}$ (et où $(-\omega_k)$ sont les zéros de la fonction d'Airy en ordre décroissant). On rappelle la formule de la fonction de Green associée aux deux demi-ondes au temps t obtenue à partir de la décomposition de la donnée $\delta_{x=a, y=0}$ en somme de modes de galerie :

$$G_{W,h}(t, x, a, y) = \sum_{k \geq 1} \int_{\mathbb{R}} e^{\pm it\sqrt{\lambda_k(\theta)}} e^{iy\theta} \chi(h|\theta|) e_k(x, \theta) e_k(a, \theta) d\theta. \quad (2.3)$$

Remarque. La fonction G_W est une paramétrice pour l'équation $i\partial_t u \pm \sqrt{-\Delta}u = 0$ (et donc de l'équation des ondes (1.1)) avec donnée au temps $t = 0$ égale à $\chi(hD_y)\delta_{x=a, y=0}$. Elle est valable pour toute distance initiale $a > 0$ au bord.

- Pour de petites valeurs de la distance initiale au bord a , $a \ll h^{22/39}$, on utilise directement la formule explicite de G_W pour estimer la solution de l'équation des ondes dans Ω en norme L^∞ .

- Pour $a \gg h^{4/7}$, la formulation sous forme de somme spectrale n'est d'aucune utilité et on obtient une paramétrice sous la forme d'une somme indexée selon le nombre de réflexions au bord. Chaque terme dans la somme est une intégrale dont la phase admet des points critiques dégénérés d'ordre inférieur ou égal à 3. Les deux régimes se recouvrent bien car $h^{4/7} \ll h^{22/39}$.

Dans le travail [OI13] nous avons généralisé notre résultat précédent au cas d'un domaine strictement convexe quelconque (Ω_d, Δ) (le résultat ci-dessous redonne, dans le cas du modèle, le même résultat que précédemment : seule la forme de l'énoncé est un peu différente dans l'expression de la majoration.)

Théorème 2. ([OI13]) *Soit $d \geq 2$ et soit Ω une variété compacte dont le bord est strictement convexe. Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. Il existe $C > 0$, $T_0 > 0$ et $a_0 > 0$ tels que pour tout $a \in]0, a_0]$, $h \in (0, 1)$ et $t \in [-T_0, T_0]$, la solution u_a de (1.1) avec donnée $(u_0, u_1) = (\delta_a, 0)$, où δ_a désigne la distribution de Dirac à distance a de $\partial\Omega$, vérifie*

$$|\psi(-h^2\Delta)u_a(t, x)| \leq \frac{C}{h^d} \min \left\{ 1, a^{1/4} \left(\frac{h}{|t|} \right)^{\frac{d-2}{2} + \frac{1}{4}} + \left(\frac{h}{|t|} \right)^{\frac{d-2}{2} + \frac{1}{3}} \right\}. \quad (2.4)$$

La construction de la paramétrice dans le cadre d'un opérateur de Laplace Δ général implique plusieurs difficultés techniques importantes : l'idée "simple" consistant à dire qu'on sera proche du cas modèle anisotrope ne trouve pas de traduction élégante dans une preuve qui permettrait de tordre un opérateur sur l'autre. Il faut donc effectuer une construction microlocale perturbative "à la main". Une autre différence majeure par rapport au cas du modèle de Friedlander est l'absence des modes de galeries : puisque la construction d'une paramétrice dans le régime $a \lesssim h^{2/3}$ en termes d'intégrales oscillantes ne s'avère pas être une option, en raison de la géométrie qui dégénère lorsque la donnée est trop proche du bord, dans le cas général il faut d'abord construire des "quasimodes" (qui vont dépendre de toutes les variables et pas seulement de la variables normale x comme les e_k) et expliciter leurs propriétés. Il s'avère que cela n'est possible que lorsque $k \ll h^{-1/4}$, qui correspond essentiellement au régime où la différence entre les phases des e_k et celles des quasimodes est suffisamment "petite" de façon à ce que le facteur exponentiel correspondant (à cette différence) n'oscille pas "trop". Cette étape (la construction des quasimodes dans un domaine strictement convexe quelconque, avec des estimations raisonnablement uniformes dans les divers paramètres) représente à elle seule un effort complètement indépendant du reste et semble entièrement nouvelle et d'intérêt indépendant.

Nous donnons quelques détails sur les différents aspects de cette construction dans les sous-sections qui suivent.

2.1.1 Intégrales oscillantes et théorème de Melrose

Pour construire une paramétrice dans le cas des distances initiales au bord pas "trop" petites, où les modes de galerie ne servent plus mais où la géométrie du front d'onde peut être utilisée, on écrit l'opérateur général sous la forme suivante

$$\Delta = \partial_x^2 + R(x, y, \partial_y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d-1}$$

avec

$$R(0, y, \partial_y) = \sum \partial_{y_j} \partial_{y_k} + O(|y|), \quad \partial_x R(0, y, \partial_y) = \sum R_1^{j,k}(y) \partial_{y_j} \partial_{y_k}$$

(ce qui est toujours possible localement et où, grâce à la condition de stricte convexité on sait que la forme quadratique $q(\eta) = \sum R_1^{j,k}(y)\eta_j\eta_k$ est définie positive) et on essaie d'obtenir une solution approchée de (1.1) à partir d'une solution (explicite) de l'opérateur modèle donné par :

$$\Delta_M = \partial_x^2 + \sum \partial_{y_j}^2 + x \left(\sum R_1^{j,k}(0) \partial_{y_j} \partial_{y_k} \right). \quad (2.5)$$

Le passage de la solution de l'équation des ondes avec Laplacien modèle (anisotrope) Δ_M au cas général de Δ nécessite l'utilisation du théorème des surfaces *glancing* de Melrose :

Théorème 3. ([21]) *Deux paires de hypersurfaces avec intersection "glancing" sont localement équivalentes, via une transformation canonique symplectique χ_M .*

Pour l'opérateur modèle Δ_M , les hypersurfaces $\{q_M = X = 0\}$ et $\{p_M = \Xi^2 + \Theta^2 + Xq(\Theta) - 1 = 0\}$ ont une intersection *glancing* au point $(X = 0, Y = 0, \Xi = 0, |\Theta| = 1)$, c.a.d. qu'elles vérifient la condition suivante :

$$\{p, q\} = 0, \{p, \{p, q\}\} \neq 0 \text{ and } \{q, \{p, q\}\} \neq 0 \text{ en } (0, 0, 0, 1). \quad (2.6)$$

Dans le cas qui nous concerne, la paire $\{q = x = 0\}$ and $\{p = \xi^2 + R(x, y, \theta) - 1 = 0\}$ vérifie aussi la condition (2.6). Le Théorème de Melrose nous dit qu'il existe une transformation canonique χ_M qui vérifie

$$\chi_M(X = 0, \Xi^2 + \Theta^2 + Xq(\Theta) = 1) = (x = 0, \xi^2 + R(x, y, \theta) = 1).$$

Fonction génératrice : A partir d'une fonction génératrice de χ_M on va pouvoir obtenir maintenant une paramétrice du cas général à partir d'une paramétrice du cas modèle. En fait, si on introduit

$$G_M(X, Y, \theta, \omega) = e^{iY\theta} Ai(Xq(\theta)^{1/3} - \omega),$$

alors G_M vérifie $-\Delta_M G_M = (|\theta|^2 + \omega q(\theta)^{2/3})G_M + O_{C^\infty}(|\theta|^{-\infty})$. Soit $(x - X)\Xi + (y - Y)\Theta + \Gamma(x, y, \Xi, \Theta)$ une fonction génératrice de χ_M , alors on peut montrer qu'il existe un symbole $p(x, y, \theta, \omega, \sigma)$ de degré 0, à support compact dans un voisinage de $(0, 0, 0, \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}^{d-1} \setminus 0$ pour lequel

$$G(x, y, \theta, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i(y\theta + \sigma^3/3 + \sigma(xq(\theta)^{1/3} - \omega) + \tau\Gamma(x, y, \sigma q(\theta)^{1/3}/\tau, \theta/\tau))} p \, d\sigma$$

vérifie $-\Delta G = \tau^2 G + O_{C^\infty}(|\eta|^{-\infty})$ et où $\tau = \tau(\omega, \theta) = \sqrt{|\theta|^2 + \omega q(\theta)^{2/3}}$. En même temps, en utilisant un résultat dû à Melrose et Taylor, G s'écrit sous la forme

$$G(x, y, \theta, \omega) = e^{i\psi} \left(p_0 Ai(\zeta) + i x p_1 Ai'(\zeta) \right),$$

où les phases ψ et ζ sont homogènes de degrés 1 et 2/3, vérifient l'équation eikonale et $-\zeta = \omega - x e_0(x, y, \theta, \omega)$ avec e_0 elliptique. Le symbole p_0 est elliptique et $x p_1$ s'annule sur le bord. Cela implique que le symbole p peut être choisi de façon à ne pas dépendre de σ en $x = 0$ (ce qui est hautement non trivial). On introduit alors un opérateur qui agit sur des fonctions régulières g comme suit

$$K_\omega(g)(t, x, y) = \int e^{it\tau(\omega, \theta)} G(x, y, \theta, \omega) q^{1/6}(\theta) \chi(h|\theta|) \chi(h\tau(\omega, \theta)) \hat{g}(\theta, \frac{\omega}{h^{1/3}}) d\theta, \quad (2.7)$$

et on déduit que $K_\omega(g)(t, x, y)$ vérifie $\partial_t^2 K_\omega(g) - \Delta K_\omega(g) = O(h^\infty)$ (car $|\theta| \simeq 1/h$ sur le support du symbole de K_ω). De plus, $K_{\omega_k}(g)|_{x=0} = 0$ pour tout $k \geq 1$ car $-\zeta|_{x=0, \omega=\omega_k} = \omega_k$ et $Ai(-\omega_k) = 0$. On pose également

$$J(g)(x, y) = \int G(x, y, \theta, \omega) q(\theta)^{1/6} \chi(h|\theta|) \chi(h\tau(\omega, \theta)) \hat{g}(\theta, \omega/h^{1/3}) d\theta d\omega, \quad (2.8)$$

alors $J(g)(x, y) = \int_{\mathbb{R}} K_{\omega}(g)(0, x, y) d\omega$. On montre que J est un opérateur intégral de Fourier, elliptique. Pour tout $h^{2/3-\epsilon} \leq a < r_0$ (avec $\epsilon > 0$ petit) on montre, grâce à l'ellipticité de l'opérateur J , qu'il existe une fonction régulière $g_{h,a}$ telle que

$$J(g_{h,a})(x, y) = \chi_0(hD_x) \varkappa(hD_y) \delta_{(a,0)} + O_{C^\infty(|(x,y)| \leq r_0)}(h^\infty),$$

où $\varkappa \in C_0^\infty$ est à support près de $\mathbb{S}^{d-1}$ et $\chi_0 \in C_0^\infty$ est à support près de 0 (en effet cela suffit, car des arguments classiques d'optique géométrique permettent d'obtenir facilement la forme générale de la solution avec donnée $(1 - \chi_0(hD_x)) \varkappa(hD_y) \delta_{(a,0)}$).

Le but est d'obtenir des paramétrices de la même forme entre deux réflexions successives; dans ce but on utilise une formule sommatoire analogue à la formule de Poisson (rappelons que la solution de l'équation des ondes 1D sur un intervalle peut s'écrire comme une somme spectrale ou comme un peigne de Dirac, et que la formule sommatoire de Poisson relit justement ces deux expressions.) On pose $A_{\pm}(z) = Ai(e^{\pm 2i\pi/3} z)$, où Ai est la fonction d'Airy. On introduit la fonction suivante

$$L(\omega) = \pi + i \log \left(\frac{A_-(\omega)}{A_+(\omega)} \right), \quad L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}. \quad (2.9)$$

Proposition 1. (Airy-Poisson) On a l'égalité suivante dans l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_{\omega})$:

$$\sum_{N \in \mathbb{Z}} e^{-iNL(\omega)} = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{L'(\omega_k)} \delta_{\omega=\omega_k}.$$

On pose maintenant :

$$\mathcal{P}_{h,a}(t, x, y) = \langle \sum_{N \in \mathbb{Z}} e^{-iNL(\omega)}, K_{\omega}(g_{h,a}) \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{L'(\omega_k)} K_{\omega_k}(g_{h,a}).$$

Si l'on se place dans le cas du modèle de Friedlander, alors la somme en N est l'analogue de la construction par réflexion successive (et permet de la simplifier, les phases étant maintenant explicites dans les régimes qui nous intéressent), et la somme en k est la somme spectrale. Dans le cas général, la somme en N permet de traiter le régime qui suit :

Proposition 2. Pour $h^{2/3-\epsilon} < a < r_0$, $\mathcal{P}_{h,a}(t, x, y)$ est une paramétrice de (1.1) qui vérifie la condition de Dirichlet.

On a ainsi obtenu une solution sous la forme d'une somme d'intégrales oscillantes (la somme sur N) qui sont presque-orthogonales en temps. Estimer la norme L^∞ de la somme à t fixé revient à estimer le sup des normes L^∞ de chaque terme. Chaque terme est une intégrale oscillante avec un unique point critique d'ordre 3 qui apparaît uniquement pour $x = a$ et une suite (t_n, y_n) qui n'est plus explicite mais dépend des directions initiales.

2.1.2 Les quasimodes

On a vu que dans le cas d'un domaine modèle et pour des petites valeurs de la distance initiale a au bord on peut utiliser les fonctions propres e_k du Laplacien de Friedlander Δ_F pour décomposer la donnée sous la forme (2.2). Ces fonctions propres, qui ne dépendent que de la variable normale x et sont donnés par des formules explicites en termes de la fonction d'Airy, n'apparaissent d'ailleurs dans la littérature que dans le cas d'un domaine modèle.

Dans le cas d'un domaine strictement convexe général nous n'avons pas une compréhension adéquate des fonctions propres du Laplacien $-\Delta$. Par conséquent, on utilise la théorie spectrale pour l'opérateur modèle $-\Delta_M$ pour décomposer une donnée de la forme $\chi_0(-h^2\Delta_M)\mathcal{K}(hD_y)\delta_{x=a,y=0}$ de la même manière que dans (2.2) (en termes de "vrais" modes de galerie e_k),

$$\chi_0(-h^2\partial_x^2 + xq(h\partial_y))\mathcal{K}(hD_y)\delta_{x=a,y=0} = \sum_{k \geq 1} \mathcal{E}_M(x, y, a, \omega_k),$$

où $\mathcal{E}_M(x, y, a, \omega_k) = \int e^{iy\theta} \chi_0(h^{2/3}\omega_k q^{2/3}(\theta)) \mathcal{K}(h|\theta|) e_k(x, \theta) e_k(a, \theta) d\theta$. Ici $e_k(x, \theta)$ désignent les fonctions propres de $-\Delta_M$ et sont donnés par la formule

$$e_k(x, \theta) = \frac{\sqrt{2\pi}q(\theta)^{1/6}}{\sqrt{L'(\omega_k)}} Ai\left(xq(\theta)^{1/3} - \omega_k\right), \quad (2.10)$$

où $L'(\omega_k) = \int_0^\infty Ai^2(x - \omega_k) dx \simeq \sqrt{2\omega_k}$ est telle que $\|e_k(\cdot, \theta)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} = 1$; il se trouve que ces constantes de normalisations sont exactement les valeurs de la dérivée de la fonction L introduite en (2.9) calculées en ω_k . On fixe une valeur $h^{-\epsilon} \leq K_h \leq h^{-1/4+\epsilon}$, $\epsilon > 0$, et dans un premier temps on montre qu'il existe une fonction régulière $g_{h,a,1}$ telle que, pour tout $k \leq K_h$ on ait

$$\frac{2\pi}{L'(\omega_k)} K_{\omega_k}(g_{h,a,1})(0, x, y) = \mathcal{E}_M(x, y, a, \omega_k), \quad \forall 1 \leq k \leq K_h, \quad (2.11)$$

ainsi que $\sum_{k \geq K_h} \frac{2\pi}{L'(\omega_k)} K_{\omega_k}(g_{h,a,1})(0, x, y) = O(h^\infty)$. D'autre part, pour des valeurs $\omega_k > K_h \geq h^{-\epsilon}$ on peut utiliser des arguments de phase stationnaire dans $K_{\omega_k}(g)$; on montre qu'on peut construire une fonction régulière $g_{h,a,2}$ telle que, si $\chi \in C_0^\infty$ est à support dans $[0, 1]$, alors

$$\left\langle \sum_{N \in \mathbb{Z}} e^{-iNL(\omega)} (1 - \chi(h^\epsilon \omega)), K_\omega(g_{h,a,2})(0, x, y) \right\rangle_\omega = \sum_{k > K_h} \mathcal{E}_M(x, y, a, \omega_k) + O(h^\infty), \quad (2.12)$$

et aussi

$$\left\langle \sum_{N \in \mathbb{Z}} e^{-iNL(\omega)} \chi(h^\epsilon \omega), K_\omega(g_{h,a,2})(0, x, y) \right\rangle_\omega = O(h^\infty). \quad (2.13)$$

On déduit de (2.12) et (2.13) que $g_{h,a,2}$ vérifie

$$\left\langle \sum_{N \in \mathbb{Z}} e^{-iNL(\omega)}, K_\omega(g_{h,a,2})(0, x, y) \right\rangle_\omega = \sum_{k > K_h} \mathcal{E}_M(x, y, a, \omega_k) + O(h^\infty),$$

où la somme sur $k > K_h$ est en réalité finie et s'arrête à $k \lesssim 1/h$ (car au delà il s'agit de considérer des ondes transverses qui ne rencontrent le bord qu'un seul fois au plus). Pour construire $g_{h,a,2}$, on utilise la Proposition 1 (Airy-Poisson) pour écrire le terme à droite dans (2.12) sous la forme $\langle \sum_N e^{-iNL(\omega)} (1 - \chi(\omega/\omega_{K_h})) \mathcal{E}(x, a, y, \omega) \rangle_\omega$ et on montre qu'au plus trois termes dans cette somme sur N (correspondant aux valeurs $N \in \{0, \pm 1\}$) ont des contributions non-triviales; on sépare ensuite la somme à gauche dans (2.12) en deux parties correspondant aux $N \in \{0, \pm 1\}$ et $|N| \geq 2$. Dans la somme sur $N \in \{0, \pm 1\}$, chaque terme peut être décomposé en deux parties en écrivant $Ai(\zeta) = e^{i\pi/3} A_+(\zeta) + e^{-i\pi/3} A_-(\zeta)$ (car $\omega > h^{-\epsilon}$, $x, a \lesssim h^{2/3}$ et $\theta \simeq 1/h$ ce qui implique $|\zeta| = \omega - xe_0(x, y, \theta, \omega) \gtrsim h^{-\epsilon}$). En regroupant astucieusement ces contributions, on met en évidence deux opérateurs intégraux de Fourier, elliptiques, qu'on peut donc inverser pour obtenir deux fonctions régulières $g_{h,a,2,\pm}$ dont la somme, notée $g_{h,a,2}$, vérifie (2.12) et (2.13). Puisque $K_{\omega_k}(g_1 + g_2) = K_{\omega_k}(g_1) + K_{\omega_k}(g_2)$, la somme $g_{h,a,1} + g_{h,a,2}$ vérifie

$$2\pi \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{L'(\omega_k)} K_{\omega_k}(g_{h,a,1} + g_{h,a,2}) = \chi_0(-h^2\partial_x^2 + xq(h\partial_y))\mathcal{K}(hD_y)\delta_{x=a,y=0}.$$

Intérêt du résultat Comme déjà mentionné au début de cette partie, le résultat du cas modèle, ainsi que sa généralisation au cas d'un domaine strictement convexe, représentent une avancée importante dans la compréhension de la dispersion pour les ondes, avec une analyse microlocale détaillée de la propagation d'une onde près d'un bord. Il s'agit de la première construction d'approximation haute-fréquence des ondes à un niveau de précision suffisant pour en déduire des estimations de dispersion. Notre construction permet de surmonter la présence d'un nombre arbitraire de caustiques, ce qui est à notre connaissance le premier résultat de ce genre.

Pour aller plus loin

Une question naturelle serait de se demander quelles sont les estimations de dispersion optimales dans un domaine borné de $\mathbb{R}^d$? Dans le cas strictement convexe, pour répondre à cette question nous avons dû comprendre les propriétés géométriques des cônes de lumière (en autres termes, de la stratification de la "sphère" de rayon t , qui est le lieu des points atteints en temps t en suivant les bicaractéristique généralisées). Dans ce cas, la géométrie du front d'onde devient singulière en temps arbitrairement petit (dépendant de la fréquence et de la distance initiale au bord). Cette étape particulièrement importante, qui consiste en une analyse raffinée de la géométrie du front d'onde (rendue difficile à cause de la présence des rayons multi-réfléchis et de leurs limites, les rayons glissants), suivie de plusieurs arguments de phase stationnaire dégénérée, permet d'obtenir la dispersion optimale.

Traiter le cas d'un domaine général représente un vrai défi : on peut penser obtenir des résultats (optimaux si possible), en suivant les grandes lignes de l'approche à l'intérieur du convexe strict, dans le cas d'un convexe non strict (le cas de l'intérieur d'un cylindre modèle a été traité par mon doctorant Len Meas - voir [20]).

Une situation qui peut créer des difficultés d'un ordre plus élevé est celles des points du bord où la courbure change de signe (rappelons ici que, d'une part, la méthode qui consiste à doubler la métrique le long du bord ne peut pas être utilisée si on souhaite des résultats optimaux dans les variables tangentielles et que, d'autre part, la propagation des singularités de Melrose et Sjöstrand ne peut pas être appliqué directement pour obtenir la dispersion).

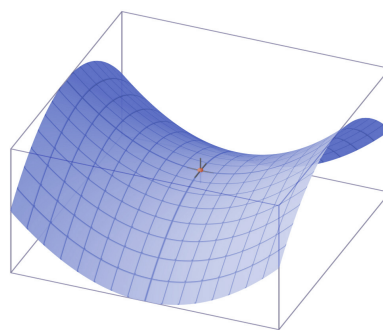


Fig. : Première étape à franchir : une surface de type selle. Source : Wikipedia

Enfin, dans le cadre le plus général, il faudrait comprendre la situation des points du bord près desquels passent des géodésiques ayant un contact d'ordre 3 au plus avec le bord et classifier les différents types de caustiques susceptibles d'apparaître (car il n'est pas totalement exclu qu'il puisse y avoir caustiques d'ordre plus élevé que les queues d'aronde - lorsqu'on considère des dimensions d'espace plus grandes).

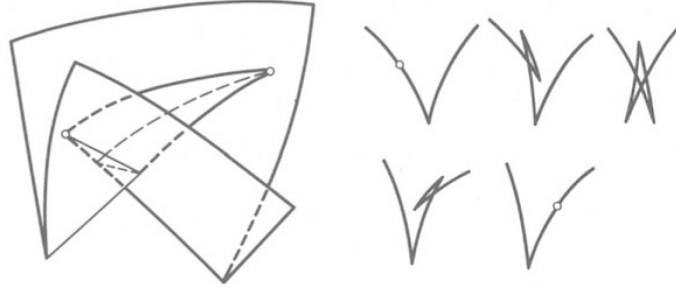


Fig : Sections d'une surface caustique de type "papillon" (en 3D à gauche, en 2D à droite). Source : Y. A. Kravtsov et al., Caustics, "Catastrophes and Wave Fields", 1999

2.2 Estimations en temps long pour les ondes dans le modèle de Friedlander et applications au flot de Klein-Gordon

Dans les Théorèmes 1 et 2 le temps est borné : le domaine qui nous intéresse est strictement convexe et donc borné (le modèle de Friedlander étant un modèle simplifié de la boule unité). En effet, sur des variétés compactes il ne peut pas y avoir de dispersion en temps grand pour un paquet d'ondes, car il n'y a tout simplement pas la place où disperser (d'autre part, pour l'équation de Schrödinger sur un compact, la vitesse "infinie" de propagation est la cause d'une perte immédiate - en temps très petit, dépendant de la fréquence - dans l'estimation de dispersion). Cependant, si on ne peut pas espérer des estimations de dispersion en temps long dans la boule unité, on peut se poser la question (naturelle) de savoir si de telles estimations **globales en temps** peuvent être obtenues dans le domaine de Friedlander qui n'est pas compact même s'il est localement un modèle pour la boule. On peut d'ailleurs penser à un guide d'ondes en spirale.

On peut se poser ces questions dans le cadre plus général du flot linéaire de l'équation de Klein-Gordon :

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta + m^2)u^{(m)}(t, x) = 0, & x \in \Omega \\ u^{(m)}|_{t=0} = u_0, \partial_t u^{(m)}|_{t=0} = u_1, \\ u^{(m)} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.14)$$

Comme avant, Δ est l'opérateur de Laplace-Beltrami dans Ω et si $\partial\Omega \neq \emptyset$, on considère la condition au bord de Dirichlet. Ici $m \in \{0, 1\}$: lorsqu'on parle de l'équation des ondes on écrit $u^{(m=0)}$ et lorsqu'on considère l'équation de Klein Gordon on écrit $u^{(m=1)}$. Pour $\Omega = \mathbb{R}^d$ avec métrique plate, la solution $u_{\mathbb{R}^d}^{(m)}(t, x)$ to (2.14) avec donnée $u_0 = \delta_{x_0}, u_1 = 0, x_0 \in \mathbb{R}^d$ a une formule explicite

$$u_{\mathbb{R}^d}^{(m=1)}(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{i(x-x_0)\xi + it\sqrt{|\xi|^2 + m^2}} d\xi$$

et, en utilisant des arguments standard de phase stationnaire on obtient l'estimation de dispersion libre pour tout temps $t > 0$, où l'on remarque l'influence de la masse pour $t > 1/h$, où la dispersion devient meilleure (même décroissance que pour Schrödinger) :

$$\|\chi(hD_t)u_{\mathbb{R}^d}^{(m)}(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C(d)h^{-d} \min \left\{ 1, (h/t)^{\frac{d-1}{2}}, (h/t)^{\frac{d-1}{2}} \frac{1}{m\sqrt{th}} \right\}. \quad (2.15)$$

Lorsque $\Omega = \Omega_d$ avec métrique g_F héritée de Δ_F et $(u_0, u_1) = (\psi(hD_y)\delta_{x=a, y=0}, 0)$, la fonction de Green pour (2.14) est obtenue (au moins formellement) de la même manière que (2.3),

$$G^m((t, x, y), (t_0, x_0, y_0)) = \sum_{k \geq 1} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{\pm i(t-t_0)\sqrt{m^2 + \lambda_k(\theta)}} e^{i\langle (y-y_0), \theta \rangle} e_k(x, \theta) e_k(x_0, \theta) d\theta. \quad (2.16)$$

On écrit $G_W = G^{m=0}$ pour la fonction de Green des ondes (sur $(0, \infty) \times \Omega_d$) et $G_{KG} := G^{m=1}$ lorsqu'on considère le flot de Klein-Gordon. On doit traiter séparément les situations suivantes (dont seulement la première a été considérée dans [OI7, OI13] dans le cas de G_W) :

- Les "grandes fréquences" $\sqrt{-\Delta_F} \simeq 2^j$ pour $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 1$: cela implique $\sqrt{\lambda_k(\theta)} \simeq 2^j$ et la situation la plus délicate apparaît lorsqu'on considère $|\theta| \simeq 2^j$ également, ce qui correspond aux directions initiales presque tangentes au bord quand le nombre de réflexions au bord atteint son pic. En effet, si on note (ξ, θ) les variables duales de (x, y) dans l'espace cotangent, on a

$$\lambda_k(\theta) = |\theta|^2 + \omega_k |\theta|^{4/3}, \quad \xi^2 \simeq \omega_k |\theta|^{4/3} \quad (2.17)$$

et lorsque $\lambda_k(\theta) \simeq 2^{2j}$ et $|\theta|^2 \simeq 2^{2j}$ alors l'angle $(\xi/|\theta|)^2$ prend des valeurs petites, et correspond à des directions initiales dans un petit cône autour d'une direction parallèle à la tangente au bord en $(a, 0)$. Lorsque $(\xi/|\theta|)^2 \gtrsim 1$, cela correspond à des rayons transverses (qui, pour des temps grands, peuvent aussi rebondir un grand nombre de fois sur le bord mais induisent des estimées de dispersions meilleurs que dans le cas des "directions tangentes" $(\xi/|\theta|)^2 \ll 1$). On pose $h = 2^{-j} \in (0, 1/2]$ et on introduit une localisation spectrale $\psi_1(h\sqrt{\lambda_k(\theta)})$ sous l'intégrale en θ dans (2.16), où $\psi_1 \in C_0^\infty([\frac{1}{2}, \frac{3}{2}])$, pour obtenir une paramétrice localisée spectralement (car $-\Delta_F(e^{i\langle y, \theta \rangle} e_k(x, \theta)) = \lambda_k(\theta) e^{i\langle y, \theta \rangle} e_k(x, \theta)$). On remarque que pour chaque k dans la somme (2.16) on a $(\xi/|\theta|)^2 \simeq (\omega_k |\theta|^{-2/3}) \simeq \omega_k h^{2/3}$ et, en utilisant l'asymptotique $\omega_k \sim k^{2/3}$, cela implique que seulement les contributions de $k \lesssim h^{-1}$ correspondent à des directions "tangentes". Soit $\psi \in C_0^\infty([\frac{1}{2}, \frac{3}{2}])$ tel que $\psi_1(\xi) + \sum_{j \geq 1} \psi(2^j \xi) = 1$. On définit la partie "tangentielle" de la fonction de Green (localisée en θ) G^m pour $(x_0, y_0) = (a, 0)$ comme suit

$$G_h^{\#,m}(t, x, a, y) := \sum_{k \geq 1} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{it\sqrt{m^2 + \lambda_k(\theta)}} e^{i\langle y, \theta \rangle} \psi_1(h|\theta|) \psi_1(h\sqrt{\lambda_k(\theta)}) e_k(x, \theta) e_k(a, \theta) d\theta. \quad (2.18)$$

Il s'agit d'une somme finie $k \lesssim 1/h$ qui correspond aux angles $(\xi/|\theta|)^2 \sim (\omega_k |\theta|^{-2/3}) \sim \omega_k h^{2/3} \lesssim 1$, où la dernière inégalité est due aux propriétés des supports du cut-off ψ_1 .

- Lorsque $\sqrt{-\Delta_F} \simeq 2^j$ et $0 < |\theta| \leq 2^{j-1}$ on a $\omega_k |\theta|^{4/3} \simeq 2^{2j}$. En utilisant (2.17), ce case correspond à des directions purement transverses (puisque $(\xi/|\theta|)^2 \sim \omega_k/|\theta|^{2/3} \sim 2^{2j}/|\theta|^2 \geq 4$) qui n'avaient pas été traitées auparavant dans ce domaine (dans [OI7], [OI11] le temps étant borné, la situation $(\xi/|\theta|)^2 \gtrsim 1$ correspond à un nombre fini de réflexions au bord et les estimées découlent de [4]). On introduit la partie "transverse" de la fonction de Green G^m comme suit $G_h^{b,m} := \sum_{j \geq 1} G_{h,2^j h}^m$, où, pour $\psi \in C_0^\infty([\frac{1}{2}, \frac{3}{2}])$ comme précédemment,

$$G_{(h,\tilde{h})}^m(t, x, a, y) := \sum_{k \geq 1} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{\pm it\sqrt{m^2 + \lambda_k(\theta)}} e^{i\langle y, \theta \rangle} \psi(\tilde{h}|\theta|) \psi_1(h\sqrt{\lambda_k(\theta)}) e_k(x, \theta) e_k(a, \theta) d\theta. \quad (2.19)$$

Dans (2.19) la somme sur k est également finie et restreinte (grâce au support de ψ_1) à $\omega_k \lesssim \tilde{h}^{4/3}/h^2$. Dans ce cas, la distance initiale au bord a peut prendre des valeurs assez larges $1 \lesssim a \leq 4(\tilde{h}/h)^2$ (au delà de $4(\tilde{h}/h)^2$, la décroissance exponentielle du facteur d'Airy $e_k(a, \theta)$ donne une contribution $O(h^\infty)$, de la même manière que dans $G_h^{\#,m}$ pour $a \gtrsim 1$). Quant aux estimations de dispersion, après une succession de changements de variables, l'analyse de $G_{(h,\tilde{h})}^m$ peut être ramenée à une situation similaire du cas précédent (comparable à celle de $G_{h^3/\tilde{h}^2}^{\#,m}$).

- Les "petites fréquences" $|\sqrt{-\Delta_F}| \leq 2$ et $|\sqrt{-\Delta_y}| \leq 2$: on considère $\phi \in C_0^\infty((-2, 2))$ avec $\phi = 1$ sur $[0, \frac{3}{2}]$ et, comme précédemment avec ψ_1 , on introduit la localisation spectrale $\phi(\sqrt{\lambda_k(\theta)})$ sous l'intégrale en θ dans (2.16). Puisque $(1 - \phi(|\theta|))\phi(\sqrt{\lambda_k(\theta)}) = 0$, on rajoute la cut-off $\phi(|\theta|)$. On souhaite traiter ensuite toutes les valeurs $|\theta| \simeq 2^{-j}$ pour $j \in \mathbb{N}$. On définit $\psi_2(\rho) := \phi(\rho) - \phi(2\rho)$, alors $\sum_{j \in \mathbb{N}} \psi(2^j|\theta|) = \phi(|\theta|)$ et $|\theta| \neq 0$ sur le support de chaque $\psi(2^j|\theta|)$ (qui est inclus dans $[\frac{3}{4}, 2]$). Puisque $\{e_k(x, \theta)\}_{k \geq 0}$ forme une base de Hilbert de $L^2(\mathbb{R})$ pour tout $|\theta| \neq 0$, on est toujours autorisé à utiliser la décomposition (2.2). On obtient une paramétrice de (2.16) sous la forme $\sum_{j \in \mathbb{N}} G_j^m$ avec donnée $(\phi(D_y)\delta_{x=a, y=0}, 0)$

$$G_j^m(t, x, a, y) := \sum_{k \geq 1} \int e^{i(y\theta + t\sqrt{m^2 + \lambda_k(\theta)})} \psi_2(2^j|\theta|) \phi(\sqrt{\lambda_k(\theta)}) e_k(x, \theta) e_k(a, \theta) d\theta.$$

Le dernier cas des petites fréquences n'a jamais été rencontré dans nos travaux précédents. Dans [OI14], nous avons récemment obtenu le résultat suivant pour G_h^m dans $(0, \infty) \times \Omega_d$:

Théorème 4. ([OI14]) Soit $m \in \{0, 1\}$, $d \geq 2$ et $\chi \in C_0^\infty([1, 2])$. Il existe $C > 0$ tel que pour tout $a > 0$, $h \in (0, 1)$, $t \in \mathbb{R}$, la solution $u^{(m)}$ de (2.14) avec Δ remplacé par Δ_F , Ω par Ω_d et avec donnée $(u_0, u_1) = (\delta_{a,0}, 0)$, où $\delta_{a,0}$ désigne la distribution de Dirac en un point $(a, 0) \in \Omega_d$, vérifie

$$|\chi(h\sqrt{-\Delta_F})u^{(m)}(t, x, a, y)| \leq \frac{C}{h^d} \min \left\{ 1, \left(\frac{h}{|t|} \right)^{\frac{d-2}{2} + \frac{1}{4}} \right\}.$$

Soit $\phi \in C_0^\infty((-2, 2))$ égale à 1 sur $[0, \frac{3}{2}]$. Il existe $C_0 > 0$ tel que pour tout $a > 0$, $t \in \mathbb{R}^*$

$$|\phi(\sqrt{-\Delta_F})u^{(0)}(t, x, a, y)| \leq C_0 \min \left\{ 1, \frac{1}{|t|^{\frac{d-1}{2}}} \right\}.$$

Il existe $C_1 > 0$ tel que pour tout $a > 0$, $|t| > 1$

$$|(\phi(\sqrt{-\Delta_F})u^{(1)}(t, x, a, y))| \leq C_1 \min \left\{ 1, \frac{1}{|t|^{\frac{d-2}{2} + \frac{1}{3}}} \right\}.$$

Si une paramétrice pour (2.14) s'obtient d'une manière équivalente aux ondes (en termes de modes de galerie, puis, en utilisant une formule de type Airy-Poisson, en termes de réflexions au bord, la difficulté majeure par rapport à la situation d'un temps borné est le fait qu'on peut avoir beaucoup plus d'ondes qui se croisent près du bord. Si pour $t \leq 1$ la preuve est identique à celle pour les ondes, pour $t > 1$ il faut distinguer plusieurs régimes, et pour chaque régime compter le nombre d'ondes qui peuvent avoir une contribution non-triviale à un instant donné, ainsi que la somme de ces contributions. La preuve devient rapidement très technique dans le régime $t \in (1, 1/h)$ lorsque le nombre d'ondes qui "comptent" est d'au plus $O(1) + \frac{t}{\sqrt{a}\lambda^2}$, avec $\lambda = \frac{a^{3/2}}{h}$; pour $t \geq 1/h$, le nombre de modes étant trop grand, la paramétrice en termes de réflexions au bord ne peut plus être utilisée car la perte devient trop importante; dans ce cas on revient aux modes de galeries e_k et on utilise de façon essentielle le fait que le temps est assez grand pour pouvoir faire des phases stationnaires dans les intégrales oscillantes de la somme des e_k (notons que cette méthode ne s'applique pas pour t borné, ni même pour $t < 1/h$ suffisamment grand). Remarquons enfin que, contrairement au cas libre, la présence du terme de masse n'améliore pas la décroissance pour t grand : en quelque sorte, même pour les ondes, dans le régime t grand (ou $t \sim 1$ et a petit), on utilise déjà le terme $\omega_k|\theta|^{4/3}$ dans $\lambda_k(\theta)$ comme m est utilisé dans le cas libre, pour l'analyse des modes de galerie. En règle générale, ce terme domine m qui n'apporte donc aucun gain supplémentaire.

Les petites fréquences Notons que dans le cas des petites fréquences le Théorème 4 implique des résultats optimaux pour l'équation des ondes mais une perte pour Klein-Gordon, en particulier lorsque la localisation spectrale correspond à $-\Delta_F \sim 1$ et $|D_y| \sim 1$, lorsque l'on perd une puissance $t^{1/6}$ (même par rapport aux estimations des ondes). Si on se place en dimension $d = 2$, les phases des intégrales de G_j^m valent $\phi_k^{(m)} := y\theta + t\sqrt{\theta^2 + \omega_k\theta^{4/3} + m^2}$, avec $\theta \sim 2^{-j}$ sur le support de ψ et $\sqrt{\theta^2 + \omega_k\theta^{4/3} + m^2} \leq 2$ sur le support de ϕ . Pour $m = 0$, cette phase n'a pas de points critiques dégénérés sur le support du symbole. Par contre, si $m = 1$ et $k \sim 2^{2j}$, alors sur le support de $\psi_2(2^j\theta)$ il peut y avoir un unique point $\theta \sim 2^{-j}$ critique dégénéré d'ordre 2. En effet, cette dérivée seconde vaut

$$\partial_\theta^2 \phi_k^{(1)} = t \frac{f(\theta^{2/3}, \omega_k)}{\sqrt{\theta^2 + \omega_k\theta^{4/3} + 1}^3},$$

où $f(z, \omega_k) = 1 - \frac{2}{9}\omega_k z^{-1}(z^2\omega_k - 1) - \frac{1}{9}\omega_k z^2$ est une fonction strictement décroissante et $z \lesssim 1$. Pour $k = 1$, $\omega_1 \simeq 2,33$ et $f(1, \omega_1) \simeq 0,06$. Puisque le support de ψ_2 est $[\frac{3}{4}, 2]$, il existe θ sur ce support tel que $f(\theta^{2/3}, \omega_k) = 0$. Si $\theta = 2^{-j}\tilde{\theta}$ avec $j \geq 1$ et $\tilde{\theta} \in [\frac{3}{4}, 2]$, l'équation $f(2^{-2j/3}\tilde{\theta}^{2/3}, \omega_k) = 0$ a une solution seulement pour une unique valeur $k = k(j)$ qui vérifie $k(j) \sim 2^{2j}$ (on utilise $\omega_k \sim k^{2/3}$). Lorsque cela arrive, le lemme de Van der Corput induit un facteur $t^{-1/3}$ (et on peut montrer en faisant une phase stationnaire dégénérée que cette perte est même optimale). Notons que cela correspond uniquement à une localisation spectrale telle que $-\Delta_F \sim 1$.

En un certain sens, nous sommes ramenés à un opérateur sur la variable tangentielle qui est de la forme $-\Delta_y + c|\Delta_y|^{2/3} + 1$, où $c > 0$ est un ω_k . Imaginons que l'on est en $2D$, $y \in \mathbb{R}$, alors on est amené à considérer l'intégrale oscillante suivante,

$$v(z, t) = \int e^{it(z\eta - \sqrt{|\eta|^2 + c|\eta|^{4/3} + m^2})} \psi_1(\eta) d\eta,$$

où ψ_1 localise autour de $\eta \sim 1$, et pour laquelle il y a un point critique dégénéré lorsque $m = 1$, qui n'existe pas pour $m = 0$.

On a donc mis en évidence un nouvel effet en temps long, relié à la présence de la masse sur ce modèle, dont on peut penser qu'il ne s'agit pas uniquement d'un artefact du modèle considéré et qu'il peut apparaître dans des modèles plus réalistes de guides d'ondes.

2.3 Applications aux estimations de Strichartz

Cette partie, qui résume les articles [OI6], [OI10], [OI8] et [OI11], présente nos résultats positifs récents concernant les estimations de Strichartz à l'intérieur d'un domaine strictement convexe de $\mathbb{R}^d$, obtenus à partir de nos travaux sur la dispersion, ainsi que des contre-exemples qui améliorent ceux obtenus dans ma thèse [OI4], assez surprenants à l'époque.

2.3.1 Premiers contre-exemples aux estimations de Strichartz (travaux [OI4, OI6])

Un des résultats principaux [OI4] obtenus dans ma thèse consiste à montrer que, dans ce domaine particulier de Friedlander (Ω_d, g_F) , si (d, q, r) est une paire strictement admissible pour l'équation des ondes avec $r > 4$, alors le rapport

$$\frac{\|u\|_{L^q([0,1], L^r(\Omega))}}{\|u_0\|_{\dot{H}^{\beta(d,q,r) + \frac{1}{6}(\frac{1}{4} - \frac{1}{r})}(\Omega)} + \|u_1\|_{\dot{H}^{\beta(d,q,r) + \frac{1}{6}(\frac{1}{4} - \frac{1}{r}) - 1}(\Omega)}} \quad (2.20)$$

(où $\dot{H}^\gamma$ désigne l'espace de Sobolev homogène) prend des valeurs arbitrairement grandes pour des données initiales (u_0, u_1) convenablement choisies : autrement dit, une perte de $\frac{1}{6}(\frac{1}{4} - \frac{1}{r})$ dérivées est inévitable dans les inégalités de Strichartz et cela est dû à la présence des caustiques générées en temps arbitrairement petit près du bord. La caractéristique clé de la variété qui amène à un contre-exemple est la convexité stricte du bord, c'est à dire la présence des rayons multi-réfléchis.

Dans le cadre du modèle de Friedlander (Ω_d, g_F) décrit dans la Section 2.1, le contre-exemple est construit, essentiellement, comme une superposition de solutions de type cusp de (1.1) : en effet, les fonctions propres de $-\Delta_F$ s'écrivent sous la forme $e^{iy\eta} Ai(|\eta|^{2/3}x - \omega_k)$, où la condition de Dirichlet impose que $(-\omega_k)_k$ soient les zéros de la fonction d'Airy, $Ai(-\omega_k) = 0$. En écrivant ces modes sous la forme $e^{iy\eta} Ai(|\eta|^{2/3}(x-a))$, la valeur propre est $|\eta|(1+a)^{1/2}$, ce qui implique que l'onde se propage à vitesse $(1+a)^{1/2}$ dans la direction tangentielle y . Pour construire des ondes qui ne dispersent pas il faut superposer des modes avec la même valeur du paramètre a . Si on ignore la condition au bord pour le moment, la superposition de tels modes pour des fréquences $\eta \simeq \frac{1}{h}$ donnerait, en utilisant le comportement asymptotique de la fonction d'Airy, une solution essentiellement supportée dans un h -voisinage du cusp $y - (1+a)^{1/2}t = \pm|a-x|^{3/2}$, $x \in [0, a]$. Le but est de construire une solution similaire avec condition au bord, tout en prenant a aussi petit que possible dépendant de h . Au lieu de travailler avec les zéros d'Airy, la condition au bord sera satisfaite en prenant une superposition de solutions de type cusp, chaque terme dans la somme étant choisi pour annuler la contribution au bord du cusp d'avant. La relation entre les amplitudes est dictée par l'application de billard qui, grâce aux translations en temps et variable tangentielle, a une formule explicite (rappelons que l'application de billard est définie en un point hyperbolique en suivant les deux rayons issus de ce point jusqu'à ce qu'ils croisent de nouveau le bord ; notons que dans tout voisinage d'un point glissant, qu'on peut regarder comme étant "un point diffractif vu de l'autre côté du bord, il y a des points hyperboliques.)

Dans la continuation de ma thèse, j'ai ensuite généralisé dans [OI6] ce résultat au cas d'une variété (Ω, g) de dimension $d \geq 2$ à bord régulier qui satisfait la condition suivante : *on suppose qu'il existe un point du bord $\partial\Omega$ et au moins une bicaractéristique qui passe par ce point et a un contact exactement d'ordre deux avec $\partial\Omega$ en ce point.*

Notons qu'un domaine borné, régulier, quelconque de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ satisfait cette hypothèse, car on trouve toujours un point sur son bord qui vérifie la condition précédente. En particulier, un domaine strictement convexe satisfait, bien sûr, cette condition.

La construction de [OI4, OI6] est de nature microlocale. Le passage du modèle de Friedlander à un domaine satisfaisant l'hypothèse précédente consiste en deux parties majeures : dans un premier temps on fait une réduction au cas bidimensionnel (en raisonnant par l'absurde) ; ensuite on utilise le Théorème 3 d'équivalence des surfaces glancing de Melrose près d'un point du bord où l'hypothèse est satisfaite. On obtient ainsi une perte de dérivées de $\beta(d, q, r) + \frac{1}{6}(\frac{1}{4} - \frac{1}{r})$ en dimension $d \geq 2$ qui fournit des contre-exemples pour $d \in \{2, 3, 4\}$.

Ce résultat a été surprenant car on s'attendait à ce que les estimations de Strichartz pour l'équation des ondes dans un domaine soient les mêmes que dans le cas libre. En fait, certaines fonctions propres du Laplacien, appelées modes de galerie, qui accumulent leur énergie très près du bord, contribuent à des normes $L^r(\Omega)$ très élevées et induisent ainsi des pertes de dérivées dans les estimations dite de fonction carrée par rapport au cas sans bord.

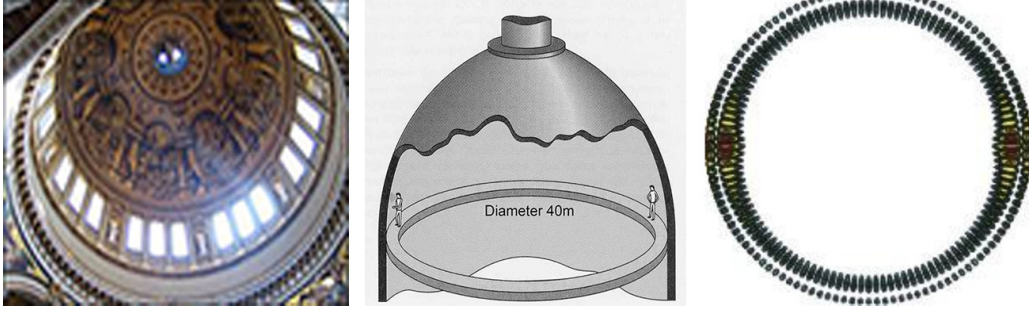
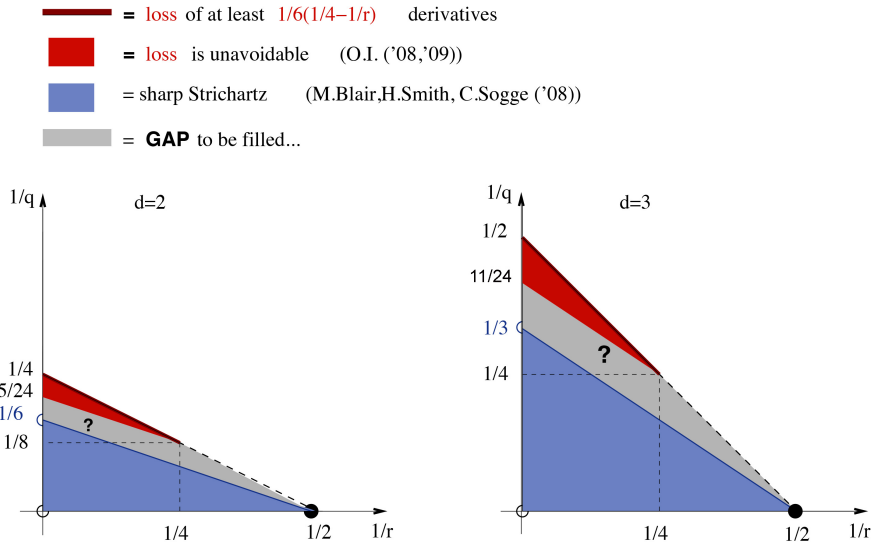


Fig. : A gauche : le dôme de la cathédrale St.Paul, où le Lord Rayleigh a étudié les modes de galerie ; à droite : l'intensité du son (venant des deux personnages du dessin au centre).

D'ailleurs, lorsqu'on s'intéresse au flot de Schrödinger semi-classique avec donnée initiale dans l'espace des modes de galerie, on s'aperçoit qu'une perte est inévitable dans les inégalités de Strichartz aussi. Cependant, ces modes de galerie, longtemps considérés comme étant les "pires" données à pouvoir décrire des éventuelles pertes de dérivées, vérifient les estimations de l'espace libre pour l'équation des ondes.

Résumons sur un diagramme l'état des résultats connus AVANT nos travaux récents [OI10], [OI11], et notons que notre construction de paramétrice de [OI11] (qui raffine celle de [OI7]) a permis, dans [OI10], d'améliorer les contre-exemples [OI4, OI6]



Nos contre-exemples de [OI4, OI6] montrent que dans la région en rouge, les estimations de Strichartz ne peuvent pas être vérifiées comme dans le cas plat, alors que les résultats de [4] montrent que pour des indices (q, r) dans la région en bleu les estimations de Strichartz sont vérifiées. Précisément, à partir de (2.20) on déduit en particulier que les estimations de Strichartz invariantes d'échelle ne sont pas vérifiées pour $\frac{3}{q} + \frac{1}{r} > \frac{15}{24}$, alors que dans [4] on démontre des résultats positifs pour $\frac{3}{q} + \frac{1}{r} < \frac{1}{2}$.

2.3.2 Strichartz : perte $1/6$ [OI8]... ou moins [OI11]

Dans notre travail [OI8] avec G. Lebeau et F. Planchon, nous avons montré que l'on pouvait utiliser les estimations très précises que nous avons obtenues sur la fonction de Green pour, en quelque sorte, "moyenner" sur les pires temps t_n dans la dispersion (car hors de tous petits voisinages de t_n , définis

dans le Théorème 1, les pertes dans la dispersion proviennent uniquement des singularités de type cusp, avec $1/6$ au lieu de $1/4$ dans la fonction $\gamma(t, h, a)$ et prouver des estimations de Strichartz avec pertes de $1/6$ dérivées pour (Ω_3, g_F) :

Théorème 5. *[[OI8]] Les estimations de Strichartz restent vraies pour la solution de (1.1) dans $(\Omega_{d=3}, g_F)$ avec $\frac{1}{q} = \left(\frac{d-1}{2} - \frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right)$.*

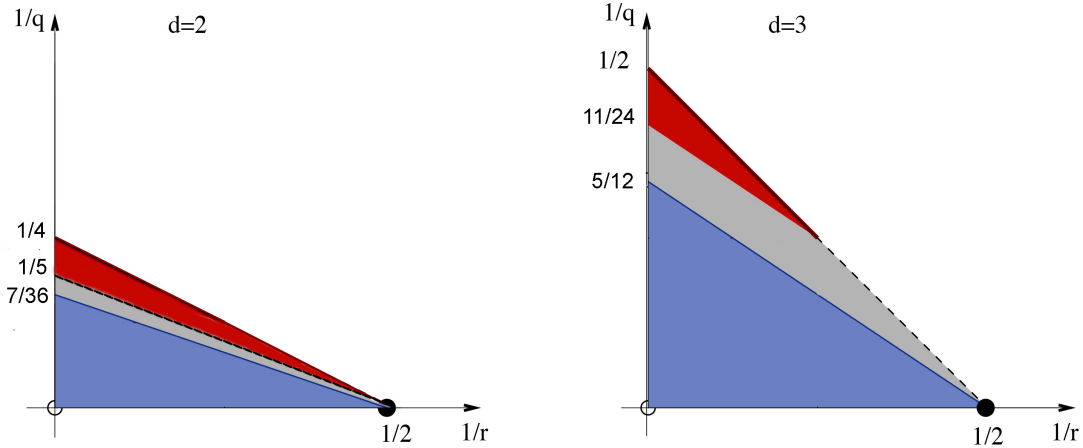
L'énoncé rend précis ce que l'on entend par "perte" : il s'agit de la quantité retirée à $(d-1)/2$ dans la relation entre les exposants q et r . Heuristiquement, l'exposant $(d-1)/2 - 1/6$ est celui qui apparaîtrait dans l'estimation de dispersion, en lieu et place de $(d-1)/2 - 1/4$, pour permettre une démonstration directe par l'argument classique du théorème précédent.

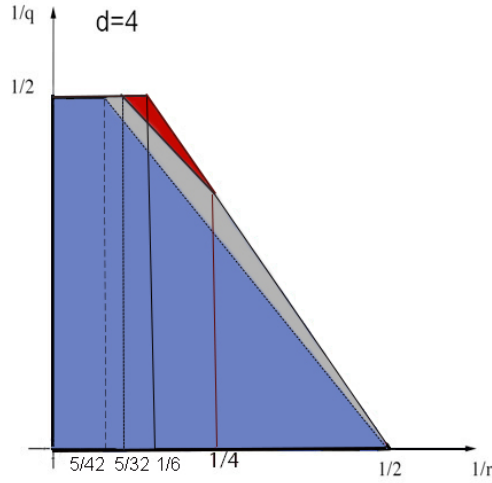
Notons que ce résultat a été démontré dans [4] en dimension $d = 2$ pour des métriques arbitraires (et, par conséquent, sans l'hypothèse de convexité stricte). Par contre, pour $d = 3$, le Théorème 5 améliorerait tous les résultats connus jusqu'à très récemment et semblait, au moins en partie, clarifier le problème des estimations de Strichartz au moins dans un cas modèle en dimension $d = 2, 3$. Nous avons ensuite réalisé que ce n'était pas le cas (en lien avec les difficultés qui apparaissent pour la dispersion dans le cas d'un convexe général) et nous avons ainsi réussi à obtenir les contre-exemples [OI10] aux inégalités de Strichartz pour les ondes en dimension $d = 2$ qui sont meilleurs que ceux présentés dans la Section 2.3.1 ainsi que, dans [OI11] le résultat positif suivant :

Théorème 6. *[[OI11]] Les estimations de Strichartz pour (1.1) sont vérifiées dans (Ω_2, g_F) pour des paires (q, r) telles que*

$$\frac{1}{q} \leq \left(\frac{1}{2} - \delta(2)\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right), \quad q > 2, \quad \delta(2) = \frac{1}{9}. \quad (2.21)$$

Pour $d = 2$, [4] obtient $\delta(2) = \frac{1}{6}$ (mais pour tout bord régulier), alors que notre résultat [OI7] sur la dispersion implique seulement $\delta(2) = \frac{1}{4}$ (en utilisant la méthode TT^* habituelle). Pour $d \geq 3$, la perte (optimale) de $1/4$ dans nos estimations de dispersion du Théorème 1 donne, uniformément par rapport à la dimension, $\delta(d) = \frac{1}{4}$, ce qui améliore déjà les résultats de [4] (où $\delta(3) = \frac{2}{3}$ et $\delta(d) = \frac{d-3}{2}$ pour $d \geq 4$; mais il faut remarquer, de nouveau, que dans [4] il n'y a pas de restriction sur le bord).





Les résultats [OI8, OI11] reposent en grande partie sur des estimations plus précises conduisant au Théorème 1 (dont certaines implicites dans [OI7]) et, surtout, sur une partie des techniques introduites pour sa généralisation dans le cas d'un convexe quelconque [OI13]. En particulier, la décomposition par rapport à l'angle d'incidence joue un rôle important. Rappelons que la perte de $1/4$, optimale pour la dispersion, implique, en utilisant la méthode TT^* usuelle, des estimations de type Strichartz sans perte (en termes d'échelle) mais avec des indices modifiés :

$$\frac{1}{q} \leq \left(\frac{d-1}{2} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right).$$

Pour obtenir un résultat qui correspondrait à une perte $1/6$ (du Théorème 5 ou de son amélioration (2.21) du Théorème 6), il faut s'intéresser au lieu et à la fréquence de l'apparition des caustiques responsables de la perte et montrer qu'elles sont suffisamment exceptionnelles pour que l'effet d'une moyenne en temps, présent dans les estimations de Strichartz puisse atténuer la perte. En effet, il se trouve que si $a > h^{1/3}$, la perte correspondante dans l'estimation L^∞ de la fonction de Green G_W introduite dans (2.3) est trop importante près des temps exceptionnels t_n pour qu'on puisse espérer appliquer un argument TT^* classique pour obtenir des Strichartz optimales. Dans ce régime, il faudra localiser la fonction de Green près de ces points t_n où une singularité de type queue d'aronde se forme et obtenir des estimations plus raffinées dans de très petits voisinages autour de ces points. Une première approche consiste donc en une analyse raffinée d'une part de la somme des modes de galeries dans le terme à droite du (2.3) (pour constater que pour a petit, la perte n'est que d' $1/3$), technique inspirée des méthodes utilisées pour estimer les sommes exponentielles ; d'autre part, de calculer intelligemment les normes Lebesgue de la fonction de Green pour profiter de l'effet de moyenne. Ceci conduit au résultat de [OI8]. Dans [OI11], nous ajoutons un ingrédient supplémentaire, où l'on cherche à exploiter le facteur $a^{1/4}$ dans l'estimation de dispersion : après introduction d'un paramètre γ relié à l'angle d'incidence (on localise l'opérateur $x + |\partial_y|^{-2} |\partial_x|^2 \sim \gamma$), ce facteur devient $\gamma^{1/4}$. De façon générale, l'ensemble des estimations précisées liées au Théorème 1 comporte un facteur de γ , et l'estimation de Strichartz obtenue dans [OI8] comporte donc un tel facteur. A l'opposé, le résultat de Smith et Sogge permet d'obtenir, par sommation sur des intervalles de taille $\gamma^{1/2}$, d'obtenir l'estimation de Strichartz libre, mais avec un facteur de γ^{-1} . L'interpolation entre ces deux estimations conduit au résultat final dans [OI11]. En pratique, [OI11] refait intégralement la construction de paramétrice du cas modèle : outre une simplification substantielle de la construction de paramétrice du [OI7] de la dispersion sur le cas modèle, elle apporte une compréhension plus profonde du comportement de ces solutions près du bord, et constitue un excellent guide de lecture du cas général exposé

dans [OI13].

Dans la suite on donne un aperçu de cette nouvelle construction, pour $d = 2$, et des estimations de dispersion raffinées qui ont permis d'obtenir (2.21). En localisant $G_{W,h}$ pour $\theta = \frac{\eta}{h} \sim \frac{1}{h}$, $\lambda_k(\eta/h) \simeq \frac{1}{h}$ ainsi que $\omega_k \simeq \frac{\gamma}{h^{2/3}}$ où $a \lesssim \gamma < 1$ est un petit paramètre, et en utilisant la Proposition 1, on obtient

$$G_{W,h}(t, x, a, y) = \sum_{\max\{h^{2/3}, a\} \leq \gamma < 1} G_{W,h,\gamma}(t, x, a, y),$$

où $G_{W,h,\gamma}(t, x, a, y) := \sum_{N \in \mathbb{Z}} V_{N,\gamma}(t, x, a, y)$ et où, pour $\psi, \psi_2 \in C_0^\infty([\frac{1}{2}, \frac{3}{2}])$, on définit

$$V_{h,\gamma}(t, x, a, y) := \frac{1}{(2\pi)^3 h^{d+1}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{i}{h} \Phi_{N,h,a}(t, x, y, \sigma, s, \alpha, \eta)} |\eta|^2 \psi(|\eta|) \psi_2(\alpha/\gamma) ds d\sigma d\alpha d\eta. \quad (2.22)$$

La phase $\Phi_{N,a,h}(t, x, y, \sigma, s, \alpha, \eta)$, obtenue en écrivant la forme intégrale des deux facteurs d'Airy, est donné par

$$\Phi_{N,h,a} = y\eta + |\eta| \left(\frac{\sigma^3}{3} + \sigma(x - \alpha) + \frac{s^3}{3} + s(a - \alpha) - N \frac{h}{|\eta|} L(|\eta|^{2/3} \alpha / h^{2/3}) + t\sqrt{1 + \alpha} \right), \quad (2.23)$$

où la fonction $L(\omega)$ est définie dans (2.9). Dans la suite on estime, de manière optimale, combien d'ondes $V_{N,\gamma}(t, \cdot)$ vont produire une contribution non-triviale à un instant donné $t > 0$.

Lemme 1. ([OI11, Lemma 4]) A $|t| > \sqrt{\gamma}$ fixé, $\sum_{\sqrt{\gamma}|N| \notin O(t)} V_{N,\gamma}^m(t, \cdot) = O(h^\infty)$.

Pour un point (t, x, y) fixé en espace-temps, on note $\mathcal{N}_\gamma(t, x, y)$ l'ensemble de $N \in \mathbb{Z}$ tels que la contribution de $V_{N,\gamma}(t, x, a, y)$ dans (2.22) n'est pas $O(h^\infty)$ (e.g. tels qu'il existe des points stationnaires pour la phase $\Phi_{N,a,h}$ dans toutes les variables), et aussi $\mathcal{N}_{1,\gamma}(t, x, y)$ l'ensemble des N appartenant à $\mathcal{N}_\gamma(t', x', y')$ pour un point (t', x', y') "suffisamment" proche de (t, x, y) tel que $|t' - t| \leq \sqrt{\gamma}$, $|x - x'| < \gamma$ et $|y' + t'\sqrt{1 + \gamma} - y - t\sqrt{1 + \gamma}| < \gamma^{3/2}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\gamma(t, x, y) &= \{N \in \mathbb{Z}, (\exists)(\sigma, s, \alpha, \eta) \text{ tels que } \nabla_{(\sigma, s, \alpha, \eta)} \Phi_{N,a,h}(t, x, y, \sigma, s, \alpha, \eta) = 0\}, \\ \mathcal{N}_{1,\gamma}(t, x, y) &= \cup_{\{(t', x', y') \mid |t' - t| \leq \sqrt{\gamma}, |x - x'| < \gamma, |y' + t'\sqrt{1 + \gamma} - y - t\sqrt{1 + \gamma}| < \gamma^{3/2}\}} \mathcal{N}_\gamma(t', x', y'). \end{aligned}$$

Proposition 3. Soit $t \in \mathbb{R}$, $|t| > h$ et $\gamma \gtrsim h^{2(1-\varepsilon)/3}$. Alors

— Le cardinal de $\mathcal{N}_{1,\gamma}(t, x, y)$ vérifie

$$|\mathcal{N}_{1,\gamma}(t, x, y)| \lesssim O(1) + \frac{|t|}{\gamma^{1/2}(\gamma^3/h^2)}, \quad (2.24)$$

et cette borne est optimale.

— La contribution de la somme des $V_{N,\gamma}$ pour $N \notin \mathcal{N}_{1,\gamma}(t, x, y)$ est $O(h^\infty)$.

Notons qu'une version faible de la Proposition 3 a été démontrée dans [OI7] pour $a > h^{4/7}$: dans ce régime, le cardinal de $\mathcal{N}_{1,\gamma}(t, \cdot)$ est évidemment uniformément borné pour tout $t \lesssim 1$. La généralisation à tout $\gamma \geq \max\{a, h^{2(1-\varepsilon)/3}\}$ s'avère cruciale dans la preuve du Théorème 6. Nous ne donnons pas ici d'éléments de preuve de la Proposition 3, disons simplement qu'elle repose sur une analyse du système d'équations satisfait par deux points critiques différents, mais proches au sens de leur appartenance à $\mathcal{N}_{1,\gamma}$, ce qui permet in fine de majorer la différence des N 's correspondants. A l'opposé, pour un N qui n'est pas dans $\mathcal{N}_{1,\gamma}$, on montre que le gradient de la phase n'est jamais nul, puis qu'il est même uniformément minoré, ce qui permet de faire une phase non-stationnaire. Le caractère

algébrique du système d'équations est ici très utile, et, dans le cas où $\gamma > h^{1/3}$, on peut même le rendre complètement explicite en remplaçant $L(\omega)$ par le premier terme de son expansion, ce qui aide à bâtir l'intuition. Il convient de noter que si $d > 2$, il faut prendre en compte l'angle en η , ce qui rend l'argument un peu plus délicat (et, pour le cas général, au delà du modèle, c'est indispensable et, si le résultat demeure, sa démonstration se complique en raison de la présence du Γ provenant de la transformation canonique, qui intervient jusque dans la définition de l'ensemble $\mathcal{N}_{1,\gamma}$: on peut y voir une manifestation du fait que, dans le cas général, la courbure le long d'une direction de propagation en y n'est plus uniforme.)

Grâce à la symétrie en x et a de la fonction de Green G_W , on peut considérer uniquement $x \leq a$. De ce fait, si $\gamma > 4a$, les points critiques de la phase $\Phi_{N,h,\gamma}$ sont tous non-dégénérés et pour chaque $G_{h,\gamma>4a}$ on obtient des estimations comparables à celles de l'espace libre. La pire situation est celle où $\gamma \simeq a \gg h^{2/3}$, lorsque $\Phi_{N,h,a}$ peut avoir plusieurs points critiques dégénérés (en σ, s) en même temps.

Soit $t \in [\sqrt{a}, 1]$ fixé et $T := t/\sqrt{a}$. D'après le Lemme 1, seulement $V_{N,a}(t, \cdot)$ avec $N \simeq T$ peut avoir une contribution signifiante. Les trois résultats qui suivent fournissent des bornes optimales pour chaque $V_{N,a}$ défini dans (2.22) avec $T \simeq N \in \mathcal{N}_{1,a}(t, \cdot)$. Soit $\lambda := \frac{a^{3/2}}{h} \gg 1$.

Proposition 4. Pour $1 \leq |N| < \lambda^{1/3}$ et $|T - 4N| \lesssim 1/N$, on a

$$|V_{N,a}(t, x, a, y)| \lesssim \frac{1}{h^2} \frac{h^{1/3}}{((N/\lambda^{1/3})^{1/4} + |N(T - 4N)|^{1/6})}. \quad (2.25)$$

Proposition 5. Pour $1 \leq |N| < \lambda^{1/3}$ et $|T - 4N| \gtrsim 1/N$, on a

$$|V_{N,a}(t, x, a, y)| \lesssim \frac{1}{h^2} \frac{h^{1/3}}{(1 + |N(T - 4N)|^{1/2})}. \quad (2.26)$$

Proposition 6. Pour $\lambda^{1/3} \lesssim N$, on a les estimations suivantes

1. Si $\lambda^{1/3} \lesssim N \lesssim \lambda$, alors

$$|V_{N,a}(t, x, a, y)| \lesssim \frac{1}{h^2} \frac{h^{1/3}}{((N/\lambda^{1/3})^{1/2} + \lambda^{1/6}|T - 4N|^{1/2})}. \quad (2.27)$$

2. Si $\lambda \lesssim N \lesssim 1/\sqrt{a}$, alors

$$|V_{N,a}(T, X, Y)| \lesssim \frac{1}{h^2} \frac{h^{1/3} \sqrt{\lambda/N}}{(N/\lambda^{1/3})^{1/2}}. \quad (2.28)$$

Les Propositions 4, 5, 6 et 3 permettent de démontrer le Théorème 1. L'estimation raffinée (2.25) est obtenue dans [OI11] par une analyse soignée autour de la dégénérescence des arguments de phase stationnaire autour des t_n . En résumé, la phase de $V_{N,a}$ comporte quatre variables : la variable η est la direction de propagation en y , elle ne produit a priori pas de décroissance, mais elle localise le front d'onde, ce qui est bien sûr utile. On la laisse de côté (en retenant l'information qui relie y à t , essentiellement). On fait une phase stationnaire classique (non dégénérée) en α , et il nous reste alors deux variables, s et σ . Suivant les régimes, il y a plusieurs cas : l'une des variables (au moins) permet une phase stationnaire non dégénérée, on la fait, et dans la variable restante, on utilise une phase stationnaire éventuellement dégénérée, à l'ordre 2 au plus (ou, plus simplement, Van der Corput puisqu'il s'agit de la dernière étape, donc d'une majoration); ou les deux variables produisent chacune une phase stationnaire dégénérée, qui est alors à l'ordre un (phase d'Airy). Enfin, si $a < h^{1/2}$, la phase stationnaire dans la variable η apporte une décroissance supplémentaire, qui est particulièrement utile

pour contrer l'augmentation progressive des recouvrements d'ondes successives, matérialisés par le second terme dans (2.24). En ce qui concerne les estimés de Strichartz, (2.25) permet de se localiser précisément là où l'argument usuel de type TT^* ne s'applique plus.

Dans la suite on esquisse très rapidement la preuve du Théorème 5 en $3D$, mais l'on n'insistera pas sur le Théorème 6 qui nécessiterait de nombreux détails supplémentaires (des éléments sur la numérologie associée sont donnés en fin de section). On pose

$$A(f)(t, x, y) = \int G_{W,h}(t-s, x, a, y-b) f(s, a, b) ds da db.$$

L'exposant dispersif est dans ce cas $\alpha_{d=3} := \frac{d-1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Il s'agit d'estimer la norme de Strichartz $L^{12/5}([0, 1], L^\infty(\Omega_3))$ (donc $r = \infty$ et $q = 12/5$) :

$$h^{2\beta} \|A(f)\|_{L_{t \in [0,1]}^{12/5} L_{x,y}^\infty} \leq C \|f\|_{L_s^{12/7} L_{a,b}^1}, \quad 2\beta = (d - \alpha_d) = 3 - 5/6 = 13/6.$$

On résume la situation : les singularités de type queue d'aronde apparaissent seulement en $t_n = 4n\sqrt{a}\sqrt{1+a}$, $x = a$; elles ont un effet sur les intervalles de temps $I_n := (t_n(1-a), t_n(1+a))$. En dehors de I_n on ne voit que des cusps qui font perdre au plus $(\frac{h}{t})^{-1/6}$ dans la dispersion et induisent donc les estimations de Strichartz avec $q = 12/5$.

On décompose $G_{W,h}(t, x, a, y) = G_{W,h,0}(t, x, a, y) + G_{W,h,sing}(t, x, a, y)$ où $G_{W,h,sing}$ dénote la partie singulière, associée à une localisation en espace - temps de $G_{W,h}$ dans des boules centrées aux points où les queues d'arondes apparaissent, i.e. en

$$|x - a| \leq \frac{a}{n^2}, \quad |t - 4n\sqrt{a}\sqrt{1+a}| \leq a^{3/2}n.$$

En utilisant les Propositions 4, 5, 6, on obtient les estimations suivantes :

Proposition 7.

$$h^{2\beta} \sup_{x,y} |G_{W,h,0}(t, x, a, y)| \leq C |t|^{-5/6};$$

$$h^{2\beta} \sup_{x,y} |G_{W,h,sing}(t, x, a, y)| \leq D(t, a, h), \quad \sup_{a,h} \int_{-1}^1 |D(t, a, h)|^p dt < \infty, \quad \forall p < 3.$$

On remarquera que le choix du $a^{3/2}n$ dans la définition de la partie singulière est fait pour que, dans l'estimation de la Proposition 4, quand on est sur la partie non singulière, on retrouve la dispersion usuelle mais avec perte $1/6$, ce qui conduit la première estimation dans la Proposition 7. Soit $A = A_0 + A_{sing}$, le découpage correspondant à la décomposition précédente. L'estimation pour A_0 en découle facilement, car la convolution par $|t|^{-5/6}$ envoie $L^{12/7}$ dans $L^{12/5}$. En utilisant la Proposition 7 on déduit que $h^{2\beta} A_{sing}$ est borné de $L_s^1 L_{a,b}^1$ dans $L_t^{3-\epsilon} L_{x,y}^\infty$: remarquons qu'il est indispensable de faire la convolution ($L^p * L^1 \rightarrow L^p$) avant d'intégrer en a :

$$\begin{aligned} \|A_{sing}(f)(t, x, y)\|_{L_{x,y}^\infty} &\leq \int \sup_{x,y} |G_{W,h,sing}(t-s, x, a, y-b)| \times |f(s, a, b)| ds da db \\ &\lesssim \int h^{-2\beta} D(t-s, a, h) |f(s, a, b)| ds da db \\ \|A_{sing}(f)(t, x, y)\|_{L_t^p L_{x,y}^\infty} &\lesssim h^{-2\beta} \int \|D(t-s, a, h)\|_{L_t^p} \|f(s, a, b)\|_{L_s^1} da db \\ \|A_{sing}(f)(t, x, y)\|_{L_t^p L_{x,y}^\infty} &\lesssim h^{-2\beta} \sup_{a,h} \|D(t, a, h)\|_{L_t^p} \|f(s, a, b)\|_{L_{s,a,b}^1}. \end{aligned}$$

Comme on travaille avec des normes locales en temps, on en déduit immédiatement l'estimation souhaitée puisque $1 < 12/7$ et $12/5 < 3$.

Pour terminer cette partie, décrivons brièvement un argument un peu différent, qui correspond à l'énoncé suivant, démontré dans le cas général d'un convexe strict :

Théorème 7. ([OII3]) *Supposons $d \geq 3$ et u une solution de (1.1) sur un domaine strictement convexe Ω . Alors il existe T, C_T tels que*

$$\|u\|_{L^q(0,T)L^r(\Omega)} \leq C_T \left(\|u_0\|_{\dot{H}^\beta(\Omega)} + \|u_1\|_{\dot{H}^{\beta-1}(\Omega)} \right), \quad (2.29)$$

où $\beta = d/2 - 1/q - d/r$ (condition d'échelle) et (d, q, r) tels que $q \geq 2$ ($q \neq 2$ pour $d = 3$),

$$\frac{1}{q} \leq \left(\frac{d-1}{2} - \delta(d) \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right), \text{ with } \delta(d) > \frac{1}{4} - \frac{1}{4d} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{d} \right).$$

Remarquons que, pour $d = 3$, on retrouve le résultat précédent énoncé sur le modèle, à epsilon près. Prenons donc $d = 3$: on introduit de façon naturelle des opérateurs A_γ à partir des opérateurs A de la démonstration précédente, en remplaçant $G_{W,h}$ par $G_{W,h,\gamma}$ où la paramétrice des ondes a été convenablement localisée pour un angle d'incidence donné $a \lesssim \gamma \lesssim 1$. Cela revient à introduire une troncature supplémentaire dans la définition de K_ω donnée par (2.7), où $h^{2/3}\omega \sim \gamma$ (dans le cas modèle, comme nous l'avons déjà indiqué, cela revient à localiser $x + \Delta_y^{-2}\partial_x^2$, qui commute au flot, dans le cas général, on s'assure que la troncature préserve raisonnablement le flot). Le régime intéressant, pour $d = 3$, est encore $a > h^{1/3}$, et la dispersion obtenue dans le cas général, avec une perte $(t/h)^{1/4}$, fait également apparaître un facteur $\gamma^{1/4}$ si l'on considère seulement $G_{W,h,\gamma}$. L'argument standard TT^* nous donne donc l'estimation suivante, où la puissance de h (qui est -2β) est escamotée dans le signe :

$$\|A_\gamma f\|_{L_t^{\frac{8}{3}} L_x^\infty} \lesssim_h \gamma^{\frac{1}{4}} \|f\|_{L_t^{\frac{8}{5}} L_x^1}. \quad (2.30)$$

D'un autre coté, A_γ vérifie les estimations habituelles de dispersion, sans perte (en appliquant [4] ou en inspectant les arguments de [OI13] pour les ondes n'ayant qu'un seul rebond au plus); ainsi, on obtient les estimations de Strichartz homogènes sur un intervalle de taille $\gamma^{1/2}$. En empilant les estimations correspondantes, on obtient une estimation en temps fini, qu'on traduit en terme d'estimation inhomogène,

$$\|A_\gamma f\|_{L_t^{\frac{2}{1-2\varepsilon}} L_x^{\frac{1}{\varepsilon}}} \lesssim_h \gamma^{-\frac{1-2\varepsilon}{2}} \|f\|_{L_t^{\frac{2}{1+2\varepsilon}} L_x^{\frac{1}{1-\varepsilon}}}. \quad (2.31)$$

On interpole alors entre (2.30) and (2.31), en visant γ^ε , avec $\varepsilon > 0$ donné par l'interpolation (pour pouvoir sommer sur γ ensuite),

$$\|A_\gamma f\|_{L_t^{\frac{12}{5-12\varepsilon}} L_x^{\frac{1}{\varepsilon}}} \lesssim_h \gamma^\varepsilon \|f\|_{L_t^{\frac{12}{7+12\varepsilon}} L_x^{\frac{1}{1-\varepsilon}}}. \quad (2.32)$$

Et en sommant donc sur γ , on retrouve, mais cette fois dans le cas général, l'estimation avec l'exposant $q = 12/5$, à ε près.

Les arguments plus sophistiqués de [OI11], pour $d = 2$, sont, en quelque sorte, la combinaison des deux arguments précédents en un seul, avec une numérologie spécifique à la dimension deux. Le premier argument est effectué en prenant grand soin des constantes, pour obtenir une estimation $L_t^6 L_x^\infty$, qui correspond à une perte $1/6$, mais avec un facteur de γ qui se trouve être $\gamma^{1/8}$ (et même $\gamma^{1/6}$ si $\gamma > h^{1/3}$). Le second argument est ensuite effectué en utilisant d'une part cette dernière estimation, et celle obtenue par empilement des Strichartz libres, qui est $L_t^4 L_x^\infty$, avec une constante $\gamma^{-1/4}$. L'interpolation des deux estimations conduit à la numérologie finale, $L^{36/7} L^\infty$ (perte $\delta(2) = 1/9$), et, dans

le cas particulier où l'on se restreint à $\gamma > h^{1/3}$, à $L_t^5 L^\infty$ (qui correspondrait à une perte théorique optimale $\delta(2) = 1/10$). On a ici totalement passé sous silence le régime des $\gamma < h^{2/3-\varepsilon}$, qui nécessite un traitement particulier basé sur des estimations mode de galeries par mode de galerie, uniformes par rapport à ω_k .

2.3.3 Amélioration des contre-exemples existants [OI10]

Les contre-exemples que j'avais obtenus dans [OI4, OI6] semblaient être consistants avec divers résultats existants, dont [28], [35] : en effet, on aurait pu envisager une relation entre la numérologie de contre-exemples et les estimations obtenues dans [28] dans le contexte de l'équation de Schrödinger (où l'exposant $r = 4$ apparaît d'une façon naturelle, ainsi que dans le travail de [35] où les auteurs s'intéressent aux estimations de projecteurs spectraux) et il aurait pu sembler naturel de penser qu'en s'inspirant des stratégies de [28] et de [35], on allait pouvoir aboutir à des résultats positifs optimaux pour des indices $r \leq 4$. De plus, la construction des contre-exemples avec données de type cusp imposait $r \geq 4$, et cette condition semblait nécessaire pour obtenir des normes $L^q L^r$ élevées.

Cependant, dans le travail récent [OI10], on montre que les estimations de Strichartz pour (1.1) peuvent être vérifiées dans (Ω_2, g_F) seulement si les paires admissibles (q, r) se trouvent dans la région bleu de la Figure de la Section 2.3.2. Ce résultat améliore les contre-exemples existants [OI4, OI6] : $\delta(2) > \frac{1}{12}$ de [OI4, OI6] est remplacé par $\delta(2) > \frac{1}{10}$, alors que la restriction $r > 4$ en dimension 2 est éliminée. Ainsi, non seulement la "perte" obtenue dans les estimations de Strichartz de [OI11] est plus importante, mais on descend la plage des indices pour lesquels cette perte existe à $r = 2$.

Théorème 8. ([OI10]) *Les estimations de Strichartz (1.3) peuvent avoir lieu dans le domaine (Ω_2, g_F) seulement pour des paires (q, r) qui vérifient*

$$\frac{1}{q} \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right). \quad (2.33)$$

En particulier, pour $r = +\infty$, on trouve $q \geq 5$.

Il est intéressant de noter que, dans [OI11], nous obtenons des estimations de Strichartz presque optimales (jusqu'à $q > 5$) pour le régime où $\gamma \geq h^{1/3}$. Autrement dit, dans le régime où les queues d'aronde dominent et sont responsables de la perte la plus grande à temps fixé, nous savons démontrer des estimations complètement optimales sur les paquets localisés en angle d'incidence. Le cas le pire dans les estimations de Strichartz obtenues dans [OI11] est donc relié à l'estimation (2.27) : la situation où nous avons deux phases stationnaires dégénérées de type Airy est donc la pire à ce jour, autour des $N \approx \lambda^{2/3}$, pour lesquels les deux termes au dénominateur de (2.27) sont du même ordre, sur une majeure partie de l'intervalle de temps où vit $V_{N,a}$. Cette région correspond à $a \sim h^{4/9}$.

La construction pour $d = 2$ peut être étendue à $d \geq 3$, cependant, on retrouve alors les résultats de [OI6] : la preuve est par contre beaucoup plus élémentaire (et explicite) que dans [OI4].

Théorème 9. ([OI10]) *Pour $d = 3, 4, 5$, les estimations de Strichartz (1.3) peuvent avoir lieu dans le domaine (Ω_d, g_F) seulement pour des paires (q, r) qui vérifient*

$$\frac{1}{q} \leq \left(\frac{d-1}{2} - \frac{1-4/r}{12-24/r} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right). \quad (2.34)$$

Remarquons que, sur cette formulation, la restriction à des indices (q, r) admissibles vérifiant (2.34) implique de nouveau $r > 4$ (comme dans [OI4, OI6]).

Les contre-exemples de [OI4, OI6] avaient été construits en propageant (soigneusement) un cusp autour du régime $a \simeq h^{1/2}$. Pour obtenir de contre-exemples dans **toute la région en rouge** dans la Figure de la Section 2.3.2 on commence avec un paquet qui est le même cusp que dans [OI4], mais lissé avec une Gaussienne à choisir convenablement, mais centré autour de $a \simeq h^{1/3}$ et on le propage, en estimant la solution qui en résulte (avec ce paquet comme donnée initiale) à l'aide de la paramétrice construite dans [OI11]. On peut voir cette solution particulière comme étant une somme d'ondes correspondant aux réflexions consécutives sur le bord : à tout instant t et pour tout point fixé (x, y) de l'espace il y a essentiellement une seule onde qui contribue de façon non-négligeable. Chaque terme dans la somme atteint son maximum en un point précis, dépendant du nombre de réflexions correspondant, et on peut estimer la taille de la région (en (x, y)) où l'amplitude de l'onde reste proche de cette valeur maximale, ce qui permet d'obtenir une borne inférieure de toutes ses normes de Lebesgue. La norme en temps est ensuite estimée en utilisant le fait que ces ondes sont "presque orthogonales".

Soit $h \in (0, 1)$, $1 > a \gg h^{2/3}$ et $\lambda := \frac{a^{3/2}}{h}$ et soit M un grand paramètre à choisir plus tard comme fonctions de a, h ; on considère comme donnée initiale à $t = 0$ une fonction $u_0(x, y)$ donnée par la formule explicite suivante, correspondant à l'heuristique précédente,

$$u_0(x, y) = \frac{1}{h} \int e^{\frac{i}{h} y \eta} \psi(\eta) \int e^{i \lambda \eta ((\frac{x}{a}-1)s + \frac{s^3}{3} + \frac{i}{2} \frac{s^2}{M})} ds d\eta. \quad (2.35)$$

On voit facilement que u_0 est microlocalement concentrée autour de $\frac{x}{a} \simeq 1$. Grâce à cette formule (2.35) on peut calculer explicitement $\|u_0\|_{L^2_{x \geq 0, y}} \simeq (hM/a^{5/2})^{1/4}$. En décomposant la transformée de Fourier en y , $\hat{u}_0(x, \eta/h) = \sum_{k \geq 1} e_k(x, \eta/h) < e_k(\cdot, \eta/h), \hat{u}_0(\cdot, \eta/h) >_{L^2(\mathbb{R}_+)}$, on obtient, de la même manière que lorsqu'on a construit $G_{W,h}$ dans (2.3) à partir de (2.2), une solution $u(t, x, y)$ de l'équation des ondes (1.1) avec Δ remplacé par Δ_F sous la forme d'une somme indexée par les zéros d'Airy ω_k ; en utilisant ensuite la Proposition 1, suivie par plusieurs intégrations dans diverses variables, on retrouve

$$u(t, x, y) = \frac{\lambda^{1/2} M^{1/2}}{(2\pi)^{3/2} h} \sum_{N \in \mathbb{Z}} \int e^{\frac{i}{h} y \eta} \psi(\eta) \int e^{i \lambda \eta \varphi_N} \chi_1(aE) d\eta d\Sigma dE, \quad (2.36)$$

où la phase φ_N , à valeurs complexes, est donné par

$$\varphi_N = \frac{t}{\sqrt{a}} \frac{(E-1)}{\sqrt{1+aE} + \sqrt{1+a}} - \frac{N}{\lambda \eta} L((\lambda \eta)^{2/3} E) + i \frac{M}{2} (E-1)^2 + \frac{\Sigma^3}{3} + \Sigma(X-E). \quad (2.37)$$

Notons que la différence entre (2.37) et la phase (2.23) vient uniquement d'une partie complexe due au choix de la donnée initiale (même si la similitude des deux phases n'est pas particulièrement mise en valeur ici par le choix des variables d'intégration).

Soit $\mathcal{R}_J := \left\{ (t, x, y), t/\sqrt{a} \in 4J\sqrt{1+a} + (-\epsilon_0, \epsilon_0), |x/a - 1| \leq \epsilon_0, |(y + t\sqrt{a})/a^{3/2}| \leq \epsilon_0 \right\}$.

Proposition 8. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe C_n tel que pour tout $0 \leq J \lesssim \frac{1}{\sqrt{a}}$, pour tout $1 \ll M \ll \lambda$ et pour tout $(t, x, y) \in \mathcal{R}_J$, on a*

$$\left| u(t, x, y) - \frac{\lambda^{1/2} M^{1/2}}{(2\pi)^{3/2} h} \int e^{\frac{i}{h} y \eta} \psi(\eta) \int e^{i \lambda \eta \varphi_J} \chi_1(aE) d\eta d\Sigma dE \right| \leq C_n \lambda^{-n}. \quad (2.38)$$

La Proposition 8 dit que si t est suffisamment proche de $4J\sqrt{a}\sqrt{1+a}$ et x est suffisamment proche de a , alors dans la somme (2.36) qui définit $u(t, x, y)$ une unique intégrale, avec $N = J$, donne une

contribution non-triviale. On peut donc explicitement estimer la norme $L^q L^\infty$ de u sur $\cup_J \mathcal{R}_J$ qui représente une borne inférieure de $\|u\|_{L^q([0,1], L^\infty(\Omega_2))}$:

$$\|hu\|_{L^q([0,1]; L^\infty(\Omega_2))} \gtrsim (\sqrt{M/\lambda})^{1/q} \lambda^{-1/3}, \quad (2.39)$$

à condition de demander $M \gg \lambda^{1/3}$ (cela revient à des questions de taille du régime en (x, y) sur lequel on peut minorer u par une même constante pas trop petite). Puisqu'on connaît la norme de u_0 et qu'on trouve, à partir de (2.39), une borne inférieure de $\|u\|_{L^q([0,1]; L^r(\Omega_2))}$, il suffit ensuite de choisir les meilleurs valeurs de a et M pour maximiser la perte dans les estimations de Strichartz. Pour cela il faut prendre $a \simeq h^{1/3}$ et $M \simeq \frac{1}{\sqrt{a}}$, ce qui prouve (2.33).

Intérêt de ces résultats Nous avons montré que la perte dans la dispersion (à temps fixé) pour les ondes dans un convexe strict, due à la présence des singularités de type queue d'aronde dans le front d'onde, n'est pas l'élément limitant dans les estimations de Strichartz pour ces ondes : les singularités sont isolées en temps (mais il y en a de plus en plus souvent en s'approchant du bord), on peut, en moyennant convenablement, obtenir de meilleures estimations qu'attendu. Là encore, il n'existait aucun résultat comparable auparavant. Nous avons ensuite amélioré ces résultats, en raffinant la construction de [OI7] et en améliorant par ailleurs les contre-exemples existants par une utilisation judicieuse de la paramétrice. Ces résultats auront d'autres conséquences, au delà des estimations ponctuelles, puisque la construction de la paramétrice est un outil puissant qui devrait permettre d'obtenir, entre autres, des résultats de propagation de singularités précisée, qui, jusqu'à maintenant, étaient hors de portée. A leur tour, ces résultats doivent permettre de progresser dans des questions délicates de contrôlabilité, laissées ouvertes par Lebeau et Rauch il y a une vingtaine d'années.

2.4 Estimations de projecteurs spectraux dans un convexe strict

Terminons par un bref panorama des estimations de projecteurs spectraux en lien avec ce qui précède. Les estimations de Strichartz admettent plusieurs variantes. Une qui est particulièrement proche des estimations des fonctions propres est l'estimation de la fonction carrée, qui affirme que, dans la cas d'un domaine *sans bord*, la solution de (1.1) vérifie

$$\|u\|_{L^{p_d}(\Omega) L^2(0,T)} \leq C_T \left(\|u_0\|_{\dot{H}^{\delta(p_d)}(\Omega)} + \|u_1\|_{\dot{H}^{\delta(p_d)-1}(\Omega)} \right), \quad p_d = \frac{2(d+1)}{d-1}, \quad (2.40)$$

où $\delta(p) = \max \left(d(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}) - \frac{1}{2}, \frac{(d-1)}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}) \right)$. L'estimation (2.40) implique des estimations pour les projecteurs spectraux :

$$\|\chi_h\|_{L^2(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)} \lesssim h^{-\delta(p)}, \quad 2 \leq p \leq \infty, \quad (2.41)$$

où l'opérateur χ_h est la projection L^2 sur l'espace engendré par les fonctions propres dont les valeurs propres correspondantes λ vérifient $h\lambda \simeq 1 + O(h)$. Cet argument peut être inversé : les estimations de projecteurs spectraux impliquent des estimations comme (2.40). Les estimations (2.41) sont optimales sur toute variété Riemannienne sans bord. Lorsque Ω est une sphère, certaines fonctions propres saturant ces bornes, ce qui démontre leurs optimalité.

Si Ω est un domaine à bord strictement concave (partout), χ_h vérifie toujours (2.41) (voir les travaux de Grieser (1992) pour $d = 2$ et de Smith et Sogge (1995) pour tout $d \geq 2$). D'autre part, pour un domaine borné (ou une variété compacte) Ω dont le bord n'est pas partout concave, le problème des projecteurs spectraux s'avère particulièrement délicat.

Notre construction très récente des modes de galerie à l'intérieur d'un domaine strictement convexe générique [OI13] devrait permettre d'obtenir les estimations de projecteurs spectraux conjecturées par Smith et Sogge près d'un point de $\partial\Omega$ où le bord est strictement convexe. En fait, ces modes sont des fonctions propres du Laplacien, (avec conditions de Dirichlet ou de Neumann au bord), qui se concentrent dans un voisinage de taille $h^{2/3} \times h^{\frac{d-2}{2}}$ du bord et les estimations (optimales) attendues en dimension $d \geq 3$ sont les suivantes :

$$\|\chi_h\|_{L^2 \rightarrow L^p} \lesssim \begin{cases} h^{-(\frac{2}{3} + \frac{d-2}{2})(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})}, & 2 \leq p \leq \frac{6d+4}{3d-4} \\ h^{-d(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}) + \frac{1}{2}}, & \frac{6d+4}{3d-4} \leq p \leq \infty. \end{cases} \quad (2.42)$$

En dimension 2, des résultats optimaux ont été établis par Smith et Sogge (Acta, 2006) dans le cas d'une variété compacte; en dimension plus grande ils ont obtenu des résultats partiels mais leur méthode (qui ne "voit" qu'une seule réflexion au bord) ne s'avère pas optimale et la question de savoir si, oui ou non, (2.42) reste vrai en dimensions $d \geq 3$ reste ouverte.

Pour aller plus loin...

Comprendre si les effets de concentration des modes de galeries pourraient être atténués en modifiant la forme du bord aurait un grand intérêt dans la conception des fibres optiques, où les caustiques finissent par brûler le matériel, comme dans l'image suivante :

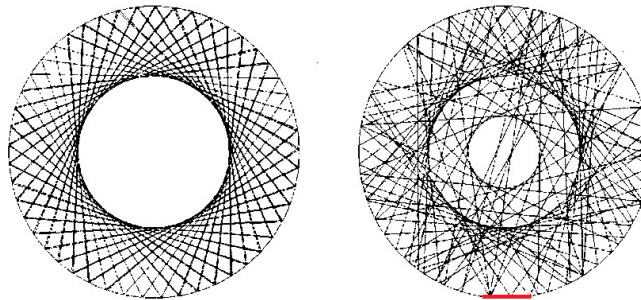


Fig. : A gauche : la formation de caustiques dans une fibre optique circulaire ; à droite : la trajectoire des rayons après avoir coupé un petit morceau du bord (le bord devient droit sur le petit segment en rouge) ; la caustique est détruite grâce au mouvement chaotique.

Source : F. Mortessagne (Institut de Physique de Nice), "Speckle statistics in a chaotic multimode fibre".

3 Equation de Schrödinger dans un domaine strictement convexe

Dans ce qui suit, on va aborder l'équation de Schrödinger sur un domaine par des méthodes semi-classiques (ce qui revient à se ramener à un intervalle de temps inversement proportionnel à la fréquence), permettant le travail dans des coordonnées de carte avec des données localisées spectralement. Soit $\psi \in C_0^\infty([\frac{1}{2}, \frac{3}{2}])$ et $h \in (0, 1]$. Dans l'équation (1.2) on introduit le temps semi-classique $t \rightarrow ht$ et on considère une donnée initiale localisée à fréquence $1/h$, c'est à dire telle que $v_0 = \psi(-h^2\Delta)v_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Si on remplace $v(t, x)$ par $v(ht, x)$, on obtient le problème semi-classique suivant

$$ih\partial_t v + h^2\Delta v = 0, \quad v|_{t=0} = \psi(-h^2\Delta)v_0. \quad (3.1)$$

Si on note $e^{iht\Delta}\psi(-h^2\Delta)v_0(x)$ le flot semi-classique linéaire, la solution de (3.1) s'écrit

$$e^{iht\Delta}\psi(-h^2\Delta)v_0(x) = \frac{1}{(2\pi h)^d} \int e^{\frac{i}{h}(\langle x, \xi \rangle - t|\xi|^2)} \psi(|\xi|^2) \hat{v}_0\left(\frac{\xi}{h}\right) d\xi. \quad (3.2)$$

Les inégalités de Strichartz pour l'équation de Schrödinger semi-classique (3.1) s'écrivent

$$h^{\frac{d}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} \|e^{iht\Delta}\psi(-h^2\Delta)v_0\|_{L^q(\mathbb{R}, L^r(\mathbb{R}^d))} \leq C \|\psi(-h^2\Delta)v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad (3.3)$$

où (q, r) une paire d -admissible pour l'équation de Schrödinger en dimension $d \geq 2$. L'inégalité de dispersion pour le problème semi-classique devient

$$\|e^{iht\Delta}\psi(-h^2\Delta)v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C(h|t|)^{-d/2} \|\psi(-h^2\Delta)v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \quad (3.4)$$

Vitesse finie de propagation pour l'équation de Schrödinger semi-classique :

On rappelle la méthode de G. Lebeau [17] pour montrer la vitesse finie de propagation de (3.1). Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ à frontière régulière C^∞ et soit Δ_D l'opérateur de Laplace dans Ω avec condition de Dirichlet sur le bord. On note $(e_\nu, \lambda_\nu)_{\nu \geq 1}$ un système orthonormal dans $L^2(\Omega)$ de fonctions propres de $-\Delta_D$ avec condition de Dirichlet sur $\partial\Omega$. Soit $\alpha \in (0, 1/2)$ et $\beta > 2$; on note

$$J_k := \{\nu | 2^k \alpha \leq \sqrt{\lambda_\nu} \leq 2^k \beta\}, \quad F_k := \text{span}\{e_\nu | \nu \in J_k\} \subset L^2(\Omega).$$

On identifie les éléments $v_{k,0} \in F_k$ à la solution du problème d'évolution, où $h_k = 2^{-k}$

$$\begin{cases} ih_k \partial_t v_k + h_k^2 \Delta_D v_k = 0, & \text{dans } \mathbb{R} \times \Omega, \\ v_k(0, x) = v_{k,0}(x), & v_k|_{\mathbb{R} \times \partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

1. *Microlocalisation du problème (3.5) dans un domaine compact de l'espace des phases* : On a un recouvrement fini par des ouverts U de coordonnées locales (x', x_d) tels que

$$U \cap \Omega = \{(x', x_d) | |x'| \leq 1, x_d > 0\} \quad \text{si } U \cap \partial\Omega \neq \emptyset.$$

On écrit $v_k = \sum_{\pm} Op_{h_k}(q_{\pm})v_k$, où $Op_h(q_{\pm})$ sont des opérateurs h -pseudodifférentiels avec $\text{supp}(q_-) \subset \{|\xi| \leq 2D\}$, $\text{supp}(q_+) \subset \{|\xi| \geq D\}$. Pour D assez grand, la contribution $Op_{h_k}(q_+)v_k$ sera $O_{L^2(\mathbb{R} \times \Omega)}(h_k^\infty)$, c'est à dire

$$\forall M \geq 1 \quad \exists C_M > 0 \quad \|Op_{h_k}(q_+)v_k\|_{L^2(\mathbb{R} \times \Omega)} \leq C_M h_k^M. \quad (3.6)$$

D'autre part, si $\chi(\tau) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ vaut 1 au voisinage de $[\alpha^2, \beta^2]$, $\psi \in C_0^\infty$, on montre aussi que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|(1 - \chi)(h_k D_t) \psi(t) Op_{h_k}(q_-) v_k\|_{L^2(\mathbb{R} \times \Omega)} = 0. \quad (3.7)$$

À ce stade $\chi(h D_t) Op_h(q_-)$ est un opérateur h -pseudodifférentiel en (t, x) , à support compact dans l'espace des phases $\tau \in [\alpha^2, \beta^2]$, $|\xi| \leq D$ pour un $D > 1$.

2. *Propagation des singularités (jusqu'au bord) [23], [24]* :

Définition 1. On dit qu'un point $\rho_0 = ((t_0, x_0), (\tau_0, \xi_0)) \in T^*(\mathbb{R} \times \partial\Omega) \cup T^*(\mathbb{R} \times \Omega)$ n'est pas dans le front d'onde au bord de $v = (v_k)_k$, $v_k \in F_k$, noté $WF_b(v)$, s'il existe un opérateur h -pseudodifférentiel de symbole $q(t, x, \tau, \xi, h)$ à support compact en (t, x, τ, ξ) , elliptique en ρ_0 , et $\psi \in C_0^\infty$ égale à 1 près de x_0 tel que

$$\forall M \geq 1 \quad \exists C_M \quad \|Op_{h_k}(q) \psi v_k\|_{L^2(\mathbb{R} \times \Omega)} \leq C_M h_k^M.$$

D'après les estimations précédentes (3.6), (3.7), on a

$$WF_b(v) \subset \{\tau \in [\alpha^2, \beta^2], |\xi| \leq D\}.$$

Pour obtenir des informations plus précises et en particulier la propagation sur le flot géodésique, on utilise une transformation qui ajoute une variable et supprime le paramètre h_k pour se ramener aux théorèmes d'analyse microlocale standard pour les problèmes aux limites d'ordre deux. Soit $\Theta(v)(s, t, x) := \sum_k e^{-i2^k s} v_k(t, x)$ qui vérifie

$$\partial_{s,t}^2 \Theta(v) = \Delta_D \Theta(v), \quad \text{dans } \mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_t \times \Omega, \quad \Theta(v)|_{\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_t \times \partial\Omega} = 0.$$

On définit $WF_b(v)$ en utilisant des opérateurs pseudodifférentiels standard (tangentiels près du bord) comme sous ensemble fermé de $T^*(\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_t \times \Omega) \cup T^*(\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_t \times \partial\Omega)$. Par le Théorème de R.Melrose et J.Sjöstrand [23], [24], le front d'onde au bord $WF_b(\Theta(v))$ est invariant par le flot bicaractéristique généralisé de $\sigma\tau - |\xi|^2$. On démontre dans [17, Lemme 1] le résultat suivant :

Proposition 9. (*Vitesse finie de propagation*) Pour $\rho \in T^*(\mathbb{R}_t \times \Omega) \cup T^*(\mathbb{R}_t \times \partial\Omega)$ soit $\theta(\rho, s)$ le point de $T^*(\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_t \times \Omega) \cup T^*(\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_t \times \partial\Omega)$

$$\theta(s, \rho) = (s, \sigma = 1, \rho), \quad (s, \sigma) \in T^*\mathbb{R}_s.$$

Alors pour tout s_0 , $v = (v_k)_k$, $v_k \in F_k$, $\rho_0 \in T^*(\mathbb{R}_t \times \Omega) \cup T^*(\mathbb{R}_t \times \partial\Omega)$

$$\rho_0 \in WF_b(v) \quad \text{si et seulement si} \quad \theta(s_0, \rho_0) \in WF_b(\Theta(v)).$$

3.1 Estimations de dispersion optimales pour l'équation semi-classique dans le domaine de Friedlander

Je me suis intéressée récemment à l'équation de Schrödinger, où, dans sa version semi-classique, on s'attendait depuis longtemps à pouvoir progresser en parallèle avec comme but de permettre de débloquent la théorie de Cauchy pour les équations non-linéaires dans les domaines bornés (par exemple, le caractère bien posé, dans l'espace d'énergie, de l'équation de Schrödinger cubique en $3D$). La difficulté nouvelle par rapport aux ondes est le fait que la vitesse de propagation, finie pour l'équation semi-classique d'après la Proposition 9 mais cependant pas constante, donne naissance à un nombre très important de paquets d'ondes qui "vivent" à un même instant donné et ont, chacun, une contribution non-négligeable (notons que pour les ondes qui se propagent à vitesse constante, à un instant fixé il y a essentiellement un seul paquet qui donne une contribution non-triviale).

Sur des variétés compactes (même sans bord), on ne peut pas s'attendre à des estimations comme dans l'espace libre : une perte doit apparaître car l'espace est borné ; l'obtention des inégalités de type Strichartz est un fait remarquable, car les estimations de dispersion ne sont pas vérifiées, même sur de (très) petits intervalles de temps.

Dans [OI4], j'avais démontré qu'il devait y avoir une perte d'au moins $\frac{1}{6}$ de dérivées dans les estimations dispersion et de Strichartz pour le flot de Schrödinger semi-classique dans le domaine de Friedlander, perte obtenue directement en prenant comme donnée initiale un mode de galerie (de la forme $\int e^{iy\theta} \psi(h|\theta|) e_k(x, \theta) e_k(a, \theta) d\theta$ avec $a \lesssim h^{2/3}$). Il n'est toujours pas connu que ce résultat soit optimal ou non pour Strichartz (a-t-on la même perte de $\frac{1}{6}$ pour tout $a \lesssim 1$?), ni même si une perte de dérivée en temps semi-classique devrait automatiquement engendrer des pertes en temps "classique"

dans le cas d'un domaine non-captant générique (dans cette géométrie, des portions concaves du bord agissent comme des miroirs et re-focalisent les paquets d'ondes - ce qui implique évidemment des pertes dans les estimations de dispersion). En fait, comprendre les estimations de dispersion et de type Strichartz dans un domaine extérieur (qui ne soit pas l'extérieur d'un convexe strict) s'avère être une tâche particulièrement difficile : les obstructions du cas d'un borné disparaissent, au moins dans le cas d'un domaine non-captant ; par conséquent, on peut raisonnablement penser que *les estimations de Strichartz devraient être vérifiées*, pourtant on n'a pas de moyen de le montrer. Le "conflit" entre cette question et une perte dans les Strichartz semi-classiques est seulement apparent : dans un domaine non-captant un paquet d'onde passe trop peu de temps dans un espace trop petit pour fournir une contradiction.

On considère dans la suite l'équation de Schrödinger semi-classique dans (Ω_d, g_M) , où g_M désigne la métrique héritée de l'opérateur Δ_M introduit dans (2.5),

$$ih\partial_t v + h^2 \Delta_M v = 0, \quad v|_{t=0} = \psi(hD_y) \delta_{x=a, y=0}, \quad v|_{\mathbb{R} \times \partial\Omega} = 0. \quad (3.8)$$

Le résultat principal obtenu s'énonce comme suit :

Théorème 10. ([OI12]) *Let $\psi \in C_0^\infty([\frac{1}{2}, \frac{3}{2}])$, $0 \leq \psi \leq 1$. Il existe des constantes $C(d) > 0$, $1 > T_0 > 0$ et $1 > a_0 > 0$ telles que pour tout $a \in (0, a_0]$, $h \in (0, 1)$ et $|t| \in (h, T_0]$, la solution $v(t, \cdot)$ de (3.8) avec donnée $v_0(x, y) = \psi(hD_y) \delta_{x=a, y=0}$ vérifie*

$$\|\psi(hD_t)v(t, x, y)\|_{L^\infty(\Omega_d)} \lesssim \frac{1}{h^d} \left(\frac{h}{|t|} \right)^{\frac{(d-1)}{2} + \frac{1}{4}}. \quad (3.9)$$

De plus, pour tout $|t| \in (\sqrt{a}, T_0]$ et tout $|t|h^{1/3} \ll a \leq a_0$, ces bornes sont saturées, et on a

$$\|\psi(hD_t)v(t, x, y)\|_{L^\infty(\Omega_d)} \sim \frac{a^{1/4}}{h^d} \left(\frac{h}{|t|} \right)^{\frac{(d-1)}{2} + \frac{1}{4}}. \quad (3.10)$$

Remarque 3.1. *Selon les différents régimes de a, h, t , on peut obtenir des estimations améliorées pour $\psi(hD_t)v(t, x, y)$:*

$$\|\psi(hD_t)v(t, x, y)\|_{L^\infty(\Omega_d)} \lesssim \frac{1}{h^d} \left(\frac{h}{|t|} \right)^{\frac{d-1}{2}} \gamma_{h,a}(t),$$

où, pour $0 < \epsilon < 1/6$ suffisamment petit, si $a \lesssim \sup\{h^{2/3-\epsilon}, (|t|h)^{1/2}\}$, alors

$$\gamma_{h,a}(t) = \begin{cases} \left(\frac{h}{|t|} \right)^{1/2}, & \text{si } h \leq |t| \lesssim h^{1/3+\epsilon}, \\ \sqrt{\sup\{h^{2/3-\epsilon}, (th)^{1/2}\}}, & \text{si } |t| \gtrsim h^{1/3+\epsilon}, \end{cases} \quad (3.11)$$

et, si $\sup\{h^{2/3-\epsilon}, (|t|h)^{1/2}\} \lesssim a \leq a_0$, alors

$$\gamma_{h,a}(t) = \begin{cases} \frac{|t|}{\sqrt{a}} \left(\frac{ha}{|t|} \right)^{1/2} + h^{1/3} |\log a|, & \text{si } \left(\frac{a^{3/2}}{h} \right)^{1/3} \leq \frac{|t|}{\sqrt{a}}, \\ \left(\frac{ha}{|t|} \right)^{1/4} + h^{1/3} |\log a|, & \text{si } \sqrt{a} \lesssim \frac{|t|}{\sqrt{a}} < \left(\frac{a^{3/2}}{h} \right)^{1/3}, \\ \left(\frac{h}{|t|} \right)^{1/2}, & \text{for } |t| \lesssim a. \end{cases} \quad (3.12)$$

Lorsque $|t| \in (\sqrt{a}, T_0]$ et $|t|h^{1/3} \ll a \leq a_0$ on a $a \gg h^{2/3}$ et $|t| > \sqrt{a} \gg h^{1/3}$, $|t|h^{1/3} \gg (|t|h)^{1/2}$, ce qui revient à $\sup\{h^{2/3}, (|t|h)^{1/2}\} \ll a$. Puisque $|t|h^{1/3} \ll a$ on trouve $(ha/|t|)^{1/4} \gg h^{1/3}|\log a|$ et dans la seconde ligne de (3.12) la contribution principale devient $a^{1/4}(h/|t|)^{1/4}$.

Remarque 3.2. En utilisant la construction des quasimodes de la Section 2.1.2, il semble naturel d'espérer pouvoir éteindre ce résultat à tout un domaine strictement convexe général. A noter que dans le cas d'un domaine convexe quelconque même le régime $a \leq h$ présente des difficultés particulières en raison de la présence de "l'image miroir" : en effet, lorsque la donnée est localisée trop près du bord, sa localisation par multiplicateur de Fourier ne s'annule pas nécessairement sur le bord ... Dans ce cas, même le choix d'une donnée initiale telle que la condition de Dirichlet soit vérifiée représente un problème en soi. Dans [OI13], on contourne notre manque de compréhension des fonctions propres du Laplacien en utilisant la théorie spectrale pour l'opérateur modèle Δ_M de (2.5) pour construire une donnée appropriée pour toute valeurs de $a > 0$. Ainsi, la construction d'une paramétrice dans le cas de l'opérateur modèle Δ_M (comme somme de fonctions propres mais aussi en termes d'ondes réfléchies au bord) et l'obtention de ses meilleures propriétés de décroissance à t fixé représente une étape cruciale pour pouvoir généraliser le Théorème 10. Cela est un travail en rédaction.

Dans la suite on esquisse les idées de la preuve du Théorème 10 lorsque Δ_M est remplacé par Δ_F et lorsque $d = 2$. Si la fonction de Green $G_{W,h}$ (voir (2.3)) pour le flot des ondes s'écrit comme une somme d'ondes "presque-orthogonales" en temps, qui "vivent", chacune, essentiellement entre trois réflexions successives (au moins si $a > h^{4/7}$) et permet d'estimer la norme L^∞ de la somme à un moment fixé par la norme d'une seule onde, dans le cas de Schrödinger semi-classique on obtient, à partir la décomposition spectrale (2.2), une paramétrice pour (3.8) qui s'écrit sous la forme suivante : $G_{S,h} = \sum_{\max\{h^{2/3}, a\} \leq \gamma < 1} G_{S,h,\gamma}$, où

$$G_{S,h,\gamma}(t, x, a, y) = \sum_{k \simeq \frac{\gamma^{3/2}}{h} \geq 1} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} e^{\pm i h t \lambda_k(\eta/h)} e^{i y \eta/h} \psi(\eta) e_k(x, \eta/h) e_k(a, \eta/h) d\eta. \quad (3.13)$$

Ici γ , comme dans le cas des ondes, est un petit paramètre et la situation la plus délicate correspond à $\gamma \simeq a$ (en effet, si $\gamma = a = x$, les deux facteurs d'Airy e_k ont des points critiques dégénérés). Puisque, pour chaque k (même borné), on a une perte de $\frac{1}{6}$ dans les estimations de dispersion (voir [OI4, Théorème 1.2 (1)]), il n'est pas envisageable d'utiliser cette formule pour en déduire des résultats optimaux... En utilisant la Proposition 1, chaque $G_{S,h,\gamma}$ devient à son tour une somme indexée sur le nombre de réflexions au bord comme suit : $G_{S,h,\gamma}(t, x, a, y) = \sum_{N \in \mathbb{Z}} W_{N,\gamma}(t, x, a, y)$, où

$$W_{N,\gamma}(t, x, a, y) = \frac{1}{(2\pi)^3 h^{d+1}} \sum_{N \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{i}{h} \tilde{\Phi}_{N,h,a} \psi(|\eta|) \psi_2(\alpha/\gamma)} ds d\sigma d\alpha d\eta. \quad (3.14)$$

Ici la phase $\tilde{\Phi}_{N,h,a}(t, x, y, \sigma, s\alpha, \eta)$ s'écrit sous la forme suivante

$$\tilde{\Phi}_{N,h,a} = y\eta + |\eta| \left(\frac{\sigma^3}{3} + \sigma(x - \alpha) + \frac{s^3}{3} + s(a - \alpha) - N \frac{h}{|\eta|} L(|\eta|^{2/3} \alpha/h^{2/3}) + t|\eta|(1 + \alpha) \right), \quad (3.15)$$

et la seule différence par rapport à (2.23) est le facteur $|\eta|^2(1 + \alpha)$ de t (au lieu de $|\eta|$ pour $\Phi_{N,h,a}$).

- Une différence majeure par rapport à $G_{W,h,a}$ est le fait que, dans cette somme qui définit $G_{S,h,a}$, il y a beaucoup trop de termes qui interfèrent à un instant donné, ce qui est du au fait que les paquets d'ondes se propagent à des vitesses différentes. Dans le cas de $G_{W,h,a}$, la Proposition 3 donne une estimation optimale du nombre d'ondes qui peuvent se croiser à t

fixé, estimation qui est uniformément bornée si $a \gtrsim h^{4/7}$. Or, il est facile à voir que, à t fixé, chaque $W_{N,a}(t, \cdot)$ avec $N \simeq t/\sqrt{a}$ contribue de la même manière dans $G_{S,h,a}$. Par conséquent, nous avons besoin des estimations très précises d'intégrales oscillantes qui permettraient de sommer sur le nombre de réflexions pour estimer la norme L^∞ de $G_{S,h,a}$ directement par la somme des normes L^∞ de chaque $W_{N,a}$: pour des valeurs suffisamment grandes de a telles que $a \gtrsim \max\{(ht)^{1/2}, h^{2/3-\epsilon}\}$ nous allons utiliser un équivalent des Propositions 4, 5, 6 obtenu pour $W_{N,a}$.

Si $\lambda = a^{3/2}/h$ et $t/\sqrt{a} \gtrsim \lambda^{1/3}$, alors l'ersatz de la Proposition 6 pour $W_{N,a}$ permet d'évaluer

$$\|G_{S,h,a}(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{h^d} \left(\frac{h}{t}\right)^{(d-1)/2} \left(\frac{ht}{a}\right)^{1/2}, \quad a \geq \max\{(ht)^{1/2}, h^{2/3-\epsilon}\}. \quad (3.16)$$

Si $t/\sqrt{a} < \lambda^{1/3}$, la situation est bien plus délicate : on introduit une fonction explicite

$$K_a\left(\frac{y}{4N\sqrt{a}}, \frac{t}{2N}\right) = \frac{|y|}{4N\sqrt{a}} - \frac{y}{|y|} + a \frac{t}{2N\sqrt{a}} \frac{4N\sqrt{a}}{|y|} \Theta\left(\frac{y}{4N\sqrt{a}}, \frac{t}{2N\sqrt{a}}, a\right), \quad (3.17)$$

(obtenue à partir du point critique non-dégénéré en α dans l'intégrale (3.14)) et où Θ est un certain polynôme en a . Cette fonction est bien définie et proche de 1 sur le support du symbole de $W_{N,a}$. Pour y fixé sur le support du symbole on doit avoir $\frac{|y|}{2t} \simeq 1$ (condition qui est imposée par le support de ψ après la phase stationnaire en η dans (3.14)). S'il existe un $N \simeq t/\sqrt{a}$ tel que l'on ait $|K_a(\frac{y}{4N\sqrt{a}}, \frac{t}{2N}) - 1| \lesssim \frac{1}{N^2}$, cet entier N est unique avec cette propriété et l'équivalent de la Proposition 4 s'écrit

Proposition 10. [OII2] Pour $1 \leq N < \lambda^{1/3}$ et $|K_a(\frac{y}{4N\sqrt{a}}, \frac{t}{2N\sqrt{a}}) - 1| \leq \frac{1}{4N^2}$, on a

$$|W_{N,a}(t, x, a, y)| \lesssim \frac{1}{h^d} \left(\frac{h}{t}\right)^{(d-1)/2} \frac{h^{1/3}}{((N/\lambda^{1/3})^{1/4} + N^{1/3} |K_a(\frac{y}{4N\sqrt{a}}, \frac{t}{2N\sqrt{a}}) - 1|^{1/6})}, \quad (3.18)$$

et $|W_{N,a}(t, x, a, y)| \big|_{x=a, K_a(\frac{y}{4N\sqrt{a}}, \frac{t}{2N\sqrt{a}})=1} \simeq \frac{1}{h^d} \left(\frac{h}{t}\right)^{(d-1)/2} \frac{h^{1/3}}{(N/\lambda^{1/3})^{1/4}}$.

Si, au contraire, $|K_a(\frac{y}{4N\sqrt{a}}, \frac{t}{2N}) - 1| \geq \frac{1}{N^2}$, alors l'équivalent de la Proposition 5 s'énonce

Proposition 11. Pour $1 \leq N < \lambda^{1/3}$ et $|K_a(\frac{y}{4N\sqrt{a}}, \frac{t}{2N\sqrt{a}}) - 1| \gtrsim 1/N^2$, on a

$$|W_{N,a}(t, x, a, y)| \lesssim \frac{1}{h^d} \left(\frac{h}{t}\right)^{(d-1)/2} \frac{h^{1/3}}{(1 + 2N |K_a(\frac{y}{4N\sqrt{a}}, \frac{t}{2N\sqrt{a}}) - 1|^{1/2})}. \quad (3.19)$$

Lorsqu'on considère la norme L^∞ en $x \geq 0, y$, on peut écrire, à t fixé, et pour $|y| \simeq 2t$,

$$\sup_{y, |y| \simeq 2t} |G_{S,h,a}(t, x, a, y)| \leq \sup_{J \lesssim \frac{1}{\sqrt{a}}} \sup_{y, |y| \simeq 2t, |y+O(a)| \in [4J-2, 4J+2]\sqrt{a}} \sum_{N \simeq t/\sqrt{a}} |W_{N,a}(t, x, a, y)|,$$

et, pour chaque J , le $\sup_{y, |y| \simeq 2t, |y+O(a)| \in [4J-2, 4J+2]\sqrt{a}} \sum_{N \simeq t/\sqrt{a}} |W_{N,a}(t, x, a, y)|$ est majoré, au plus, par $|W_{N_y,a}(t, x, a, y)| + 2 \sum_{N \neq N_y} |W_{N,a}(t, x, a, y)|$ dans le cas le pire lorsqu'il existe N_y tel que $|K_a(\frac{y}{4N_y\sqrt{a}}, \frac{t}{2N_y}) - 1| \lesssim \frac{1}{N_y^2}$. La somme sur $N \neq N_y$ vaut au plus $\frac{1}{h^d} \left(\frac{h}{t}\right)^{\frac{d-1}{2}} h^{1/3}$; en même temps, la contribution venant de l'unique terme $W_{N_y,a}(t, x, a, y)$ vaut

$$\frac{1}{h^d} \left(\frac{h}{t}\right)^{\frac{d-1}{2}} \frac{h^{1/3}}{(N/\lambda^{1/3})^{1/4}} \simeq \frac{1}{h^d} \left(\frac{h}{t}\right)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{ha}{t}\right)^{1/4}$$

et est plus grande que la précédente dans le régime $t/\sqrt{a} < \lambda^{1/3}$ considéré ici.

- Notons que l'estimation (3.16) implique une perte d'au plus $1/4$ **seulement** si $a \gtrsim (ht)^{1/2}$; en effet, même si les estimations des $|W_{N,a}|$ sont optimales pour chaque N , lorsque a est petit, le nombre d'ondes dans $G_{S,h,a}$ devient très large et empêche d'aboutir à des résultats satisfaisants. En fait, la condition $a \gtrsim (ht)^{1/2}$ correspond à des N qui vérifient $N \simeq t/\sqrt{a} \lesssim \frac{a^{3/2}}{h} = \lambda$. Il faut remarquer qu'il existe une sorte de dualité entre les deux sommes, indexées selon les zéros d'Airy et le nombre de réflexions au bord, et qui définissent la même paramétrice : lorsque a est petit, alors $k \simeq \lambda$ est également petit dans $G_{S,h,a}$, et c'est alors $N \simeq \frac{t}{\sqrt{a}}$ qui augmente. C'est pourquoi, lorsque $a \lesssim (ht)^{1/2}$, on utilise directement la formule (3.13) pour déduire le $1/4$ dans la dispersion. Notons cependant que, contrairement aux ondes, pour lesquelles chacune des intégrales dans (2.3) vérifie les estimations de dispersion usuelles, dans le cas de l'équation de Schrödinger semi-classique même les premières valeurs de k dans (3.13) vont induire une perte de $1/6$ dans la dispersion : puisque, pour $a \lesssim (ht)^{1/2}$, on a à faire à au plus $k \simeq a^{3/2}/h \lesssim (ht)^{3/2}/h$ intégrales dans (3.13) et que chacune de ces intégrales fait perdre $1/6$, on obtient in fine le résultat attendu.

3.2 Application aux inégalités de Strichartz

Déjà depuis l'obtention de nos premiers résultats pour les ondes dans le domaine de Friedlander, nous avons commencé un travail dans le but d'obtenir des estimations de Strichartz (optimales) pour Schrödinger en temps semi-classique dans (Ω_d, g_F) . Nous avons conjecturé à l'époque que la pire "perte" devait être de $\frac{1}{6}$ dérivées (par rapport au cas plat) et qu'elle devait correspondre à celle que l'on obtient en faisant agir le flot linéaire sur les modes de galerie (i.e. les e_k avec k borné, correspondant à des distances initiales au bord de taille $a \simeq h^{2/3}$). Même si on n'est toujours pas en mesure de répondre à la question d'optimalité concernant les estimations de Strichartz, le Théorème 10 implique, en utilisant la méthode TT^* habituelle, le résultat suivant :

Théorème 11. *Soit (q, r) une paire Schrödinger-admissible pour $d \geq 2$, $\frac{1}{q} \leq \left(\frac{d}{2} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right)$, et soit $s = \frac{d}{2} - \frac{2}{q} - \frac{d}{r}$, alors la solution v to (3.8) avec donnée v_0 vérifie*

$$\|\psi(hD_t)v\|_{L^q([0,T_0],L^r(\Omega_d))} \lesssim h^{-s} \|v_0\|_{L^2(\Omega_d)}. \quad (3.20)$$

La preuve du Théorème 11 est obtenue à partir du Théorème 10 en utilisant la méthode TT^* classique ainsi que l'argument de Keel-Tao [13] pour $q = 2$ en dimension $d \geq 3$. La perte semi-classique (invariante d'échelle) correspond à $1/4$ dérivée en espace, comme on peut le remarquer en dimension $d = 2$, pour laquelle la paire extrême (pas admissible) $(2, \infty)$ avec $s = 0$ est remplacée par $(8/3, \infty)$ avec $s = 1/4$. Ce résultat améliore [3] où, pour $d = 2$, on trouve $(3, \infty)$. Plus généralement, [3] obtient $(2, \infty)$ comme point limite pour $d \geq 3$, e.g. $s = d/2 - 1$, alors que Théorème 11 implique $(2, 2(2d-1)/(2d-3))$ comme point limite avec $s = 1/(2d-1)$.

Remarque 3.3. *Notons cependant que, contrairement aux ondes pour lesquelles le Théorème 1 implique une perte de $1/4$ uniquement pour une suite de temps exceptionnels, pour l'équation de Schrödinger cette perte a lieu pour tout temps dans le régime $th^{1/3} < a \lesssim 1$, donc on ne peut pas espérer adapter la preuve du Théorème 8 pour améliorer le Théorème 11. En plus, lorsque $a \simeq h^{1/2}$, l'estimation de dispersion découle en utilisant, au choix, la décomposition en fonctions propres (3.13) ou bien la somme sur le nombre de réflexions au bord (3.14) - avec même résultat final ; on finit par sommer un très grand nombre d'ondes (dans ce cas particulier $a \simeq h^{1/2}$ les deux formules ont essentiellement le même nombre de termes) et la seule approche qui pourrait permettre d'améliorer éventuellement la perte de $1/4$ dans ce régime (bénévidemment, si cela est possible) serait de s'inspirer des méthodes récentes pour les sommes exponentielles.*

Pour aller plus loin...

On voudrait bien sûr aller encore plus loin et répondre à la question suivante : quelles sont les inégalités de Strichartz *optimales* pour l'équation de Schrödinger dans un domaine *non-captant* ? Remarquons qu'à l'extérieur d'un convexe, un point source ne génère jamais de caustiques, et que ce sont les caustiques formées en temps petit par des points source près du bord qui posent problème à l'intérieur d'un convexe strict. Un domaine non-captant mais pas strictement convexe peut admettre des rayons glissant sur le bord et, en conséquence, peut satisfaire localement les hypothèses précédentes. Est-ce que l'estimation de Strichartz avec perte de $\frac{1}{6}$ dérivées (qu'on espère obtenir localement près de ces points glissants) implique toujours des pertes pour le flot en temps "classique" ?

4 Equations des ondes et de Schrödinger dans des domaines extérieurs

On considère maintenant la situation opposée, en *apparence* plus facile, d'un domaine à bord strictement concave (considérée plus facile car sans rayons multi-réfléchis, donc sans singularités géométriques dans le front d'onde). Dans ce cas, un rayon touche le bord au plus une fois, ce qui indique que la solution d'un problème au bord serait une superposition d'une onde rentrante et d'une onde sortante, liées par la condition au bord. S'il y a de problèmes qui peuvent apparaître, ils doivent être causés par les rayons qui frôlent le bord sans être déviés, appelés rayons diffractifs.

En effet, la difficulté principale à l'extérieur d'un convexe strict est liée au comportement de l'onde diffractée, près du bord de l'obstacle ; pour citer (la première phrase d'un papier de) Ludwig (1969) : "the asymptotic behavior of the field scattered by a convex object at high frequencies is extremely complicated"... L'étude de ce régime particulier (un voisinage d'un rayon diffracté) a commencé avec le travail de Keller (1962) sur la théorie géométrique de la diffraction - qu'on peut décrire comme étant une extension de l'optique géométrique dans le régime diffractif. Lorsque l'obstacle est constitué par une surface régulière, cette théorie montre que la zone d'ombre est atteinte par des rayons "rampants" sur la surface diffractante à partir de la source la plus proche. Ces rayons obéissent au principe de Fermat, et donc "rampent" sur la surface en suivant le trajet le plus court possible, c'est à dire en suivant une géodésique de la surface, avant de rejoindre un point d'observation dans la zone d'ombre.

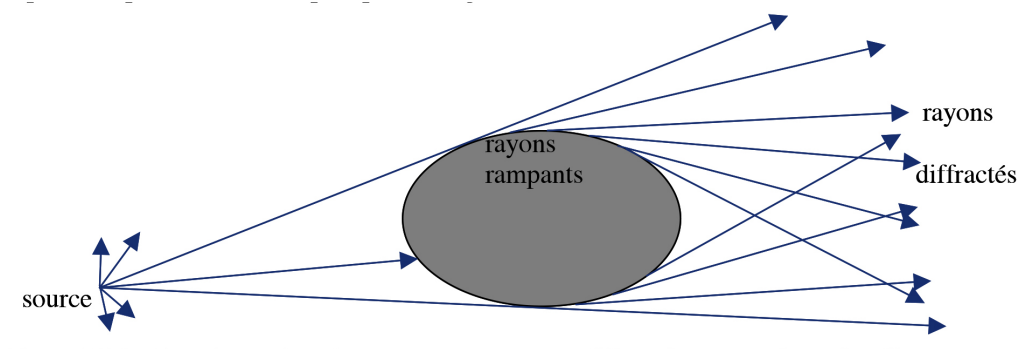


Fig. : Représentation des rayons rampants et diffractés par un obstacle "lisse".

Source : P. Vaudon, "Introduction à la théorie géométrique de la diffraction"

Depuis les travaux [14] de Keller il était conjecturé que le taux de décroissance de l'intensité de la lumière dans la zone d'ombre devait être de la forme $\exp(-C\tau^{1/3})$, où τ est la fréquence et où la

constante C est reliée à la géométrie du flot géodésique sur le bord de l'obstacle. Cette conjecture a été prouvée par Gilles Lebeau ([16]) sous l'hypothèse d'analyticité de la frontière $\partial\Omega$ (et utilisée de façon essentielle dans les travaux de Bardos, Lebeau et Rauch sur le contrôle, [2]). Comme les techniques qui ont fonctionné dans le cas analytique ne s'appliquaient pas dans le cas d'un bord C^∞ , la conjecture de Keller a été ensuite démontrée par Hargé et Lebeau ([10]) dans ce dernier cas.

L'étude microlocale des problèmes à bord a été beaucoup simplifiée par le travail de Friedlander sur l'équation des ondes, suivi des travaux de Melrose et Taylor pour le problème de Dirichlet près des rayons diffractés. En fait, localement dans un voisinage d'un bord strictement concave et près des directions diffractives, Melrose et Taylor ont construit une paramétrice ([25], [26], [27],[38]) pour la solution de l'équation des ondes qui s'est avéré un outil essentiel dans les travaux sur des domaines extérieurs qui ont suivi.

État de l'art En particulier, Hart Smith et Christopher Sogge ([34], see also [33]) ont utilisé cette paramétrice pour déduire des inégalités de Strichartz optimales (sauf pour les "endpoints", i.e. exposants de Strichartz limite) pour l'équation des ondes (1.1) à l'extérieur d'un obstacle strictement convexe de $\mathbb{R}^d$ (et aussi pour démontrer les estimations de projecteurs spectraux (2.41)). Dans ma thèse, j'ai démontré des estimations de Strichartz optimales pour le flot classique de Schrödinger avec condition de Dirichlet (pour lequel un problème supplémentaire était représenté par la vitesse dite "infinie" de propagation du flot).

Strichartz pour l'équation de Schrödinger dans un domaine extérieur

En effet, dans [OI2] j'ai démontré des inégalités de Strichartz $L_t^q L_x^r$ optimales pour l'équation de Schrödinger semi-classique à l'extérieur d'un obstacle strictement convexe de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Ce résultat est l'analogue du travail de Smith-Sogge sur l'équation des ondes, et la preuve utilise dans un premier temps la paramétrice de Melrose-Taylor près d'un rayon tangent au bord pour établir des estimations de Strichartz en temps semi-classique (c'est à dire sur un intervalle de temps de taille égale à l'inverse de la fréquence), ainsi qu'un résultat d'effet régularisant à l'extérieur d'un obstacle non captant obtenu par N.Burq [5].

On déduit deux applications directes de ce résultat : d'abord, l'existence locale des solutions à données H^1 pour l'équation de Schrödinger critique (avec une non-linéarité quintique en dimension $d = 3$ de l'espace), ainsi que le scattering pour l'équation de Schrödinger sous-critique en dimension 3. Remarquons quand même que ce résultat n'est pas nouveau dans le cas d'une non-linéarité cubique : rappelons ici un travail de Fabrice Planchon et Luis Vega [29] où sont montrés des Strichartz sans pertes à l'extérieur d'un obstacle non-captant mais seulement pour des indices satisfaisant $q = r = 4$ en dimension trois de l'espace. À partir de cela ils obtiennent le scattering pour le cas cubique à l'extérieur d'un obstacle étoilé. Le fait de connaître les estimations de Strichartz pour tous les indices admissibles (sauf les cas extrêmes) permet de simplifier considérablement la preuve de Planchon-Vega et de l'étendre à toutes les non-linéarités sous-quintiques à l'extérieur d'un convexe strict. Nos estimations de Strichartz ont ensuite été un ingrédient important dans la résolution du cas à données grandes pour l'équation critique défocalisante ([15]).

Il faut remarquer ici que, pour obtenir de telles inégalités de Strichartz nous n'avons pas utilisé la dispersion (pour la simple raison qu'on ne disposait pas de telles estimations). Dans ces travaux sur les ondes ou Schrödinger, on a tiré profit, tout comme dans [34], de la continuité L^2 de certains opérateurs pour se ramener à travailler avec des opérateurs semblables à ceux sur une variété sans bord. Il semble *très peu vraisemblable* qu'une telle approche puisse permettre d'obtenir des estimations de dispersion.

4.1 Dispersion à l'extérieur d'une boule dans $\mathbb{R}^d$. Résultats positifs dans $\mathbb{R}^3$ et contre-exemples en dimension plus grande $d \geq 4$

Plusieurs résultats positifs (de plus optimaux) sur les effets dispersifs ont été démontrés récemment à l'extérieur d'un convexe strict (Strichartz, projecteur spectraux, etc) : cependant, la question de savoir si les estimations de dispersion étaient vraies ou non est restée entièrement ouverte, même à l'extérieur d'une sphère (et cela, au moins depuis les travaux de Smith et Sogge en 1995). Puisqu'il n'y a pas de concentration apparente d'énergie, comme dans le cas d'un domaine non-captant quelconque (pour lequel les portions concaves du bord peuvent agir comme des miroirs et re-focaliser les paquets d'ondes) on pourrait raisonnablement penser que les estimations de dispersion devraient être vérifiées à l'extérieur d'un convexe (il existait juste un exemple [18] à l'extérieur d'une sphère en $\mathbb{R}^3$ dans le cas des fonctions à symétrie sphérique).

Dans le travail récent en collaboration avec G. Lebeau nous apportons des réponses à cette question : Nous considérons les équations des ondes et de Schrödinger, d'abord dans le cas de l'extérieur de la boule unité de $\mathbb{R}^d$, lorsque les calculs sont explicites et permettent de mieux comprendre le comportement de l'onde près de l'horizon apparent, ensuite (dans un travail en rédaction) à l'extérieur d'un obstacle strictement convexe de $\mathbb{R}^3$.

- si $d = 3$, nous montrons que, pour chacune des deux équations, le flot linéaire vérifie les estimations de dispersion comme dans $\mathbb{R}^3$;
- si la dimension est plus grande $d \geq 4$, nous montrons, en construisant des contre-exemples explicites, que des pertes dans la dispersion apparaissent à l'extérieur d'une boule de $\mathbb{R}^d$ et cela arrive au point de Poisson-Arago.

Théorème 12. ([OI15]) Soit $B_3(0, 1) \subset \mathbb{R}^3$ la boule unité de $\mathbb{R}^3$ et soit $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus B_3(0, 1)$. On note Δ l'opérateur Laplace dans Ω_3 avec condition de Dirichlet au bord. Alors

1. les estimations de dispersion pour le propagateur des ondes dans Ω_3 sont vérifiées :

$$\|\chi(hD_t)e^{\pm it\sqrt{-\Delta}}\|_{L^1(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)} \leq Ch^{-3} \min\{1, \frac{h}{|t|}\}.$$

2. les estimations de dispersion pour le flot de Schrödinger dans Ω_3 sont vérifiées comme dans $\mathbb{R}^3$.

On remarque qu'une perte dans la dispersion pourrait être liée (de façon informelle) à la présence d'un point de concentration : ces points apparaissent lorsque des rayons optiques (envoyés d'une même source dans des directions différentes) cessent de diverger. Le principe de Huygens énonce que lorsque la lumière éclaire un obstacle circulaire, chaque point de l'obstacle se comporte à son tour comme une nouvelle source lumineuse ponctuelle ; tous les rayons lumière issus des points de la circonférence de l'obstacle se concentrent au centre de l'ombre et décrivent le même chemin optique ; il en résulte une tache lumineuse au centre de l'ombre (le point de Poisson). Par conséquent, l'intuition nous dit que s'il y a une perte dans la dispersion, elle pourrait bien apparaître au point de Poisson.

Théorème 13. ([OI15]) Soit $B_d(0, 1)$ la boule unité de $\mathbb{R}^d$ avec $d \geq 4$. Soit $\Omega_d = \mathbb{R}^d \setminus B_d(0, 1)$, Δ l'opérateur de Laplace dans Ω_d avec condition de Dirichlet au bord et soient $Q_\pm(r)$ deux points de Ω_d situés à distance r du centre O de la boule $B_d(0, 1)$, symétriques par rapport à O . Soit $h \in (0, 1)$ suffisamment petit et $\chi \in C_0^\infty$ à support dans un petit voisinage de 1. Alors il existe γ proche de $\frac{1}{2}$ tel que, pour $r = \gamma h^{-1/3}$, on ait

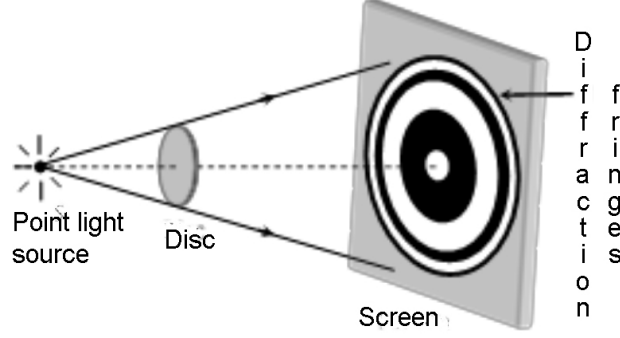
- (le propagateur des ondes) pour $t = 2(\arcsin \frac{1}{r} + \sqrt{r^2 - 1}) \sim h^{-1/3}$

$$\left| (\chi(hD_t)e^{it\sqrt{-\Delta}}(\delta_{Q_+(\gamma h^{-1/3})}) \middle| (Q_-(\gamma h^{-1/3})) \right| \simeq h^{-d} \left(\frac{h}{t} \right)^{\frac{d-1}{2}} h^{-\frac{d-3}{3}},$$

— (le propagateur de Schrödinger classique) pour $t \simeq h^{1/3}$

$$\left| (\chi(hD_t)e^{it\Delta}(\delta_{Q_+(\gamma h^{-1/6})}) \right| (Q_-(\gamma h^{-1/6})) \simeq h^{-1-\frac{d}{6}-\frac{d-3}{6}}.$$

Pour $d \geq 4$, ces estimations contredisent les estimations du cas plat $\mathbb{R}^d$ (avec perte en rouge).



En résumé, il n'y a donc pas de singularités géométriques dans le front d'onde mais d'importants effets diffractifs.

Dans la suite on esquisse les idées principales de la preuve des Théorèmes 12 et 13 à l'extérieur d'un boule en dimension $d \geq 3$ pour l'équation des ondes (la construction d'une paramétrice pour démontrer les résultats positifs en dimension $d = 3$ est ensuite utilisée pour aboutir à un contre-exemple en $d \geq 4$).

Le résultat positif pour $d = 3$ se généralise au cas d'un convexe strict quelconque, mais cette généralisation nécessite un vrai travail de paramétrisation de la zone autour de l'horizon apparent, qui n'est pas nécessaire pour la sphère où tout est explicite, comme nous allons le voir. Le contre-exemple est bien sûr valide pour n'importe quel obstacle qui présente une partie de son bord intégrant un segment d'arc de cercle d'une sphère ambiante. Il serait intéressant de savoir si l'on peut avoir un phénomène de concentration plus sophistiqué que celui que l'on va décrire dans la section qui suit.

4.1.1 Cadre général pour l'équation des ondes à l'extérieur d'une boule dans $\mathbb{R}^d$

Soit $B_d(0, 1)$ la boule unité en dimension $d \geq 3$ et $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus B_d(0, 1)$, avec $\partial\Omega = \mathbb{S}^{d-1}$. On note $Q_0 \in \Omega$ un point source et δ_{Q_0} la distribution de Dirac en Q_0 . Soit Δ le Laplacien dans Ω et $U(t, Q, Q_0) = \cos(t\sqrt{-\Delta})(\delta_{Q_0})(Q)$ la solution du problème de Dirichlet,

$$(\partial_t^2 - \Delta)U = 0 \quad \text{dans } \Omega; \quad U|_{t=0} = \delta_{Q_0}, \quad \partial_t U|_{t=0} = 0; \quad U|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4.1)$$

Si U_{free} désigne l'onde libre dans $\mathbb{R}^d$ on pose $U_{free}^+ = 1_{t>0}U_{free}$, dont la transformée de Fourier en temps vérifie

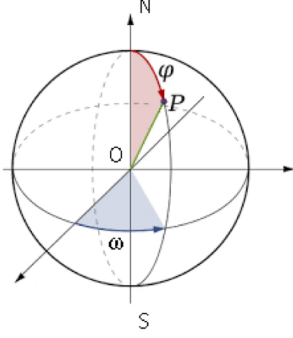
$$\widehat{U_{free}^+}(\tau, Q, Q_0) = \tau^{\frac{d-1}{2}} \frac{e^{-i\tau|Q-Q_0|}}{|Q-Q_0|^{\frac{d-1}{2}}} \Sigma_d(\tau|Q-Q_0|), \quad (4.2)$$

où $\Sigma_3 = \frac{i}{4\pi}$ et pour $d \geq 4$ et $|Q-Q_0| \gg \tau^{-1}$, $\Sigma_d(\tau|Q-Q_0|) = \sum_{j \geq 0} \Sigma_{j,d}(|Q-Q_0|\tau)^{-j}$ est un symbole avec $\Sigma_{0,d} \neq 0$. Si on note $U^+ := 1_{t>0}U$ alors on a $\partial_\nu U^+|_{\partial\Omega} = \partial_\nu U_{free}^+|_{\partial\Omega} - \mathbf{N}(U_{free}^+|_{\partial\Omega})$, où $\vec{\nu}$ le vecteur normal sortant de $\partial\Omega$ orienté vers Ω et $\mathbf{N}$ l'opérateur de Neumann (associant à une fonction sa dérivée normale sur le bord). On considère l'extension $\underline{U}$ de U à $\mathbb{R}^d$, comme suit

$$\underline{U}(t, Q, Q_0) := U(t, Q, Q_0), \quad \text{si } Q \in \Omega; \quad \underline{U}(t, Q, Q_0) := 0, \quad \text{si } Q \in \overline{B_d(0, 1)}.$$

Alors $\underline{U}$ est donnée par $\underline{U}|_{t>0} = U_{free}^+ - \square_+^{-1}(\partial_\nu U^+|_{\partial\Omega})$, où

$$\square_+^{-1}F(t) = \int_{-\infty}^t R(t-t') * F(t') dt', \quad \widehat{R(t, \xi)} = \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}. \quad (4.3)$$



Dans des coordonnées polaires telles que $\Omega_d = \mathbb{R}^d \setminus B_d(0, 1) = \{r \geq 1, (\varphi, \omega) \in [0, \pi]^{d-2} \times [0, 2\pi]\}$, l'opérateur de Laplace devient

$$\Delta = \frac{1}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{d-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\mathbb{S}^{d-1}}, \quad (4.4)$$

où $\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}}$ désigne l'opérateur de Laplace sur $\mathbb{S}^{d-1}$.

Étant donné un point source Q_0 à distance $r_0 > 1$ on peut assumer, sans perte de généralité, qu'il se situe sur l'axe ON où N, S désignent les pôles Nord et Sud, et donc que Q_0 a pour coordonnées $(r_0, \varphi = 0)$. On définit le contour apparent de Q_0 comme suit : soit $\partial\Omega_{Q_0}^+$ la région de $\partial\Omega = \mathbb{S}^{d-1}$ "qui peut être vue directement" à partir de Q_0 ,

$$\partial\Omega_{Q_0}^+ := \{P \in \partial\Omega | \vec{\nu}_P(Q_0 - P) \geq 0\} = \text{la région illuminée à partir de } Q_0.$$

Alors le contour apparent $\mathcal{C}_{Q_0}$ de Q_0 est le bord de $\partial\Omega_{Q_0}^+$: en particulier, si $P \in \mathcal{C}_{Q_0}$ alors Q_0P est tangente à $\partial\Omega$ en P . Dans les coordonnées précédentes et pour $Q_0 \in ON$, on obtient facilement

$$\mathcal{C}_{Q_0} = \left\{ P \in \mathbb{S}^{d-1} \text{ avec coordonnées } (1, \varphi_0, \omega), \text{ où } \varphi_0 \text{ est donné par } \cos(\varphi_0) = \frac{1}{r_0} \right\}. \quad (4.5)$$

4.1.2 Esquisse de la preuve du Théorème 12

En dimension $d = 3$, la formule (4.3) implique $\underline{U}|_{t>0} = U_{free}^+ - U^\#, U^\# := \square_+^{-1}(\partial_\nu U^+)$,

$$U^\#(t, Q, Q_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{(\partial_\nu U_{free}^+|_{\partial\Omega} - \mathbf{N}(U_{free}^+|_{\partial\Omega}))(t - |Q - P|, P)}{|P - Q|} d\sigma(P). \quad (4.6)$$

Notons que cette formule peut être utilisée tant que la distance entre les points sources Q_0 et d'observation Q et le bord $\mathbb{S}^{d-1}$ n'est pas trop petite. On découpe l'intégrale (4.6) selon que P se trouve dans un petit voisinage du $\mathcal{C}_{Q_0}$ ou non. Si $P = (1, \varphi, \omega)$ est tel que $|\varphi - \varphi_0| \geq \varepsilon_0$ pour une constante ε_0 petite mais fixe, alors P se retrouve ou bien dans la partie illuminée (si $\varphi - \varphi_0 < -\varepsilon_0$) ou bien dans l'ombre ($\varphi - \varphi_0 > \varepsilon_0$); dans les deux cas les estimations de dispersion en découlent facilement. Les difficultés apparaissent lorsque P est proche de $\mathcal{C}_{Q_0}$ (donc pour $|\varphi - \varphi_0| < 2\varepsilon_0$). On note $U_D^\#(t, Q, Q_0)$ l'intégrale (4.6) restreinte à P près de $\mathcal{C}_{Q_0}$ (donc à $|\varphi - \varphi_0| \leq 2\varepsilon_0$) : pour expliciter et ensuite estimer cette intégrale on utilise la paramétrice de Melrose et Taylor près d'un point diffractif.

Théorème 14. *Microlocalement près d'un point diffractif $(1, \varphi_0, \omega)$, $\omega \in [0, \pi]^{d-3} \times [0, 2\pi]$, il existe des fonctions régulières $\theta(r, \varphi, \eta)$ et $\zeta(r, \varphi, \eta)$ telles que $\theta \pm \frac{2}{3}(-\zeta)^{3/2}$ vérifie l'équation eikonale associée à (4.4); en plus, il existe des symboles $a(r, \varphi, \eta)$, $b(r, \varphi, \eta)$ qui vérifient les équations de transport associées, avec a elliptique et $b|_{\partial\Omega} = 0$, de façon à ce que, pour tout $\eta \in \mathbb{R}$ près de 1,*

$$G_\tau(r, \varphi, \eta) := e^{i\tau\theta(r, \varphi, \eta)} \left(aA_+(\tau^{2/3}\zeta) + b\tau^{-1/3}A'_+(\tau^{2/3}\zeta) \right) A_+^{-1}(\tau^{2/3}\zeta_0) \quad (4.7)$$

vérifie, pour $\tau > 1$, $(\tau^2 + \Delta)G_\tau \in O_{C^\infty}(\tau^{-\infty})$, où Δ est donné par (4.4).

En effet, puisque la formule (4.2) ne dépend pas de la variable rotationnelle ω , les phases et symboles introduits dans le Théorème 14 peuvent être choisis également indépendantes de $\omega \in \mathbb{S}^{d-2}$. Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus B_d(0, 1)$, $d \geq 2$, on peut choisir θ sous la forme $\theta(\varphi, \eta) = \varphi\eta$, indépendante de r , auquel cas on obtient, pour $\eta \sim 1$ et $\rho \sim 1$, $\zeta(r, \eta) = \eta^{2/3}\tilde{\zeta}(r/\eta)$ où, pour $\rho \geq 1$, on a

$$\frac{2}{3}(-\tilde{\zeta})^{3/2}(\rho) = \int_1^\rho \frac{\sqrt{w^2 - 1}}{w} dw = \sqrt{\rho^2 - 1} - \arccos\left(\frac{1}{\rho}\right) \simeq \frac{2}{3} \frac{(\rho - 1)^{3/2}}{\rho^{1/2}} (1 + O(\rho - 1)), \quad (4.8)$$

et si $\rho \leq 1$, $\frac{2}{3}\tilde{\zeta}^{3/2}(\rho) = \int_\rho^1 \frac{\sqrt{1-w^2}}{w} dw = \ln[(1 + \sqrt{1-\rho^2})/\rho] - \sqrt{1-\rho^2}$. On pose $\zeta_0(\eta) := \zeta(1, \eta)$. Les symboles a, b qui vérifient les équations de transport sont de la forme $a \simeq \sum_{j \geq 0} a_j(i\tau)^{-j}$ avec a_0 elliptique et $b \simeq \sum_{j \geq 0} b_j(i\tau)^{-j}$ avec $b|_{r=1} = 0$.

On rappelle que la fonction $A_+(z) := Ai(e^{-2i\pi/3}z)$ (qui apparaît dans (4.7)) ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Théorème 15. ([32, Lemma A.2]) *Pour chaque solution W (dans $\mathbb{R}^d$) de $(\tau^2 + \Delta)W \in O_{C^\infty}(\tau^{-\infty})$ avec Δ défini dans (4.4), il existe une unique fonction F_τ telle que, pour $Q = (r, \varphi, \omega)$ près de $\mathcal{C}_{Q_0}$,*

$$W(\tau, Q = (r, \varphi, \omega)) = \frac{\tau}{2\pi} \int e^{i\tau\theta(\varphi, \eta)} \left(aAi + \tau^{-1/3}bAi' \right) (\tau^{2/3}\zeta(r, \eta)) \hat{F}_\tau(\tau\eta) d\eta.$$

La construction de la fonction F est assez technique. En particulier, F dépend entièrement du contour apparent de Q_0 qui, dans le cas de l'extérieur d'un strict convexe quelconque, n'est absolument pas explicite. Notons que, dans [34], où on démontre des estimées de Strichartz optimales pour l'équation des ondes avec condition de Dirichlet à l'extérieur de tout obstacle strictement convexe, on a $F = K(U_0, U_1)$ (où (U_0, U_1) représente la donnée à $t = 0$, dans notre cas $(\delta_{Q_0}, 0)$) où K est un opérateur de Fourier intégral classique et on utilise ensuite uniquement la continuité L^2 de K sans jamais l'expliciter (ce qui fonctionne lorsqu'on travaille avec des normes L^2 mais pas dans notre cas). À l'extérieur d'une boule dans $\mathbb{R}^d$, le contour apparent d'un point est facilement identifiable ; par conséquent, la fonction F devient explicite et, en plus, elle ne dépend pas de la variable rotationnelle ω . Précisément, si $P_0 = (1, \varphi_0, \cdot)$, $\cos(\varphi_0) = 1/r_0$ est un point du contour apparent $\mathcal{C}_{Q_0}$, alors on trouve

$$\hat{F}_\tau(\tau\eta) = \tau^{-1/3} \frac{\tau^{\frac{d-1}{2}}}{|P_0 - Q_0|^{\frac{d-1}{2}}} e^{-i\tau\eta\varphi_0} e^{-i\tau|P_0 - Q_0|} \chi_1(\eta) f(\eta, \tau), \quad (4.9)$$

où la différence $|P_0 - Q_0| = \sqrt{r_0^2 - 1}$ est évidemment indépendante du choix de $P_0 \in \mathcal{C}_{Q_0}$, où f est un symbole d'ordre 0, elliptique, obtenu à partir de Σ_d (de (4.2)) (après une succession de phases stationnaires) et χ_1 est une troncature régulière à support près de 1.

Esquisse de la construction de F_τ pour tout $d \geq 2$: L'idée est d'appliquer le Théorème 15 à $W(\tau, Q, Q_0) := \widehat{U_{free}^+}(\tau, Q, Q_0)$ donné par (4.2) pour $Q \in \Omega$ près du contour apparent de Q_0 , pour obtenir, modulo $O(\tau^{-\infty})$, l'unique fonction F_τ (comme une intégrale oscillante avec des points critiques d'ordre exactement 2 sur $\mathcal{C}_{Q_0}$, qui donnera la formule (4.9)). Par symétrie rotationnelle, cette fonction ne va pas dépendre de la variable ω mais seulement de ρ .

On introduit un opérateur $T_\tau : \mathcal{E}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ qui, à $F \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ et pour (r, φ) près de $(1, \varphi_0)$, associe

$$\begin{aligned} T_\tau(F)(r, \varphi) &= \frac{\tau}{2\pi} \int e^{i\tau\theta(\varphi, \eta)} \left(aAi + \tau^{-1/3}bAi' \right) (\tau^{2/3}\zeta(r, \eta)) \hat{F}_\tau(\tau\eta) d\eta \\ &= \tau^{1/3} \frac{\tau}{2\pi} \int e^{i\tau(\theta(\varphi, \eta) - \tilde{\varphi}\eta + \sigma^3/3 + \sigma\zeta(r, \eta))} (a + b\sigma/i) F(\tilde{\varphi}) d\sigma d\tilde{\varphi} d\eta. \end{aligned}$$

L'opérateur T_τ est un opérateur de Fourier intégral elliptique près de $(r = 1, \varrho = \varrho_0, \eta = 1)$ (en particulier, on permet $r < 1$), dont la phase $\Phi = \theta(\varphi, \eta) - \tilde{\varphi}\eta + \sigma^3/3 + \sigma\zeta(r, \eta)$ est associée à la Lagrangienne suivante

$$\left\{ (r, \varphi, \tilde{\varphi}, \sigma, \eta) \mid \partial_\sigma \Phi = \partial_\eta \Phi = 0 \right\} = \left\{ \sigma^2 = -\zeta(r, \eta), \tilde{\varphi} = (\partial_\eta \theta + \sigma \partial_\eta \zeta)(r, \varphi, \eta) \right\},$$

qui est le graphe d'une transformation canonique (pour des détails dans le cas général consulter [32, Appendix] qui suit de près [38]; pour la construction d'une paramétrice près des points diffractifs (et en particulier la version générale du Théorème 14) voir [38, Section 4], ainsi que [26, 25, 27]).

Notre but est de construire F_τ telle que $T_\tau(F_\tau)(r, \varphi) = \widehat{U_{free}^+}(\tau, Q = (r, \varphi, \omega), Q_0)$ pour (r, φ) dans un petit voisinage de $(1, \varphi_0)$ (et où la variable ω n'a aucune importance car tous les termes sont invariants par rotation). Pour cela, on introduit une fonction régulière $\chi_0(r, \varphi)$ à support dans un voisinage $\mathcal{V}_{(1, \varphi_0)}$ de $\mathcal{C}_{Q_0}$ dans $\mathbb{R}^2$ et égale à 1 dans un voisinage $\mathcal{V}^1 \subset \mathcal{V}_{(1, \varphi_0)}$ de $(1, \varphi_0)$ et on pose $\tilde{T}_\tau(F) := \chi_0(r, \varphi) T_\tau(F)$. L'opérateur adjoint de $\tilde{T}_\tau$, $\tilde{T}_\tau^* : \mathcal{D}'(\mathcal{V}_{(1, \varphi_0)}) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}_{\tilde{\varphi}})$ est donné par

$$\tilde{T}_\tau^*(W)(\tilde{\varphi}) := \tau^{1/3} \frac{\tau}{2\pi} \int e^{i\tau((\tilde{\varphi}-\varphi)\eta - \sigma^3/3 - \sigma\zeta(r, \eta))} (a - b\sigma/i) \chi_0(r, \varphi) \chi_1(\eta) W(r, \varphi) dr d\varphi d\sigma d\eta.$$

On définit ensuite $E_\tau := (\tau^{1/3} \tilde{T}_\tau^*) \circ \tilde{T}_\tau : \mathcal{D}(\mathbb{R}_{\tilde{\varphi}}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_{\tilde{\varphi}})$ et on montre que, microlocalement près de $(\varphi = \varphi_0, \eta = 1)$, E_τ est un opérateur pseudo-différentiel elliptique de degré 0. Dans le cas présent, cela découle de la formule explicite (et la même preuve s'applique dans le cas des phases θ, ζ générales, localement près d'un point diffractif d'un bord strictement concave quelconque). On définit ensuite

$$F_\tau(\tilde{\varphi}) := E_\tau^{-1}(\tau^{1/3} \tilde{T}_\tau^*)(\widehat{U_{free}^+}(\tau, Q, Q_0)).$$

Par construction, F_τ vérifie $T_\tau(F_\tau) = \widehat{U_{free}^+}$ dans un voisinage $\mathcal{V}^2 \subset \mathcal{V}^1$ de $(1, \varphi_0)$. Des calculs explicites permettent d'obtenir (4.9).

Estimées de dispersion pour $U_D^\#(t, Q, Q_0)$ A partir de $\widehat{U_{free}^+}(\tau, P, Q_0) = T_\tau(F_\tau)$ dans $\mathcal{V}^2$, on peut calculer de façon explicite sa dérivée normale, ainsi que $\mathbf{N}(\widehat{U_{free}^+}|_{\mathbb{S}^2})(\tau, P, Q_0)$, comme suit

$$\begin{aligned} \partial_\nu \widehat{U_{free}^+}(\tau, P, Q_0) &= \frac{\tau}{2\pi} \int e^{i\tau\varphi\eta} \left(\tilde{a}Ai + \tau^{2/3} \tilde{b}Ai' \right) (\tau^{2/3} \zeta_0(\eta)) \hat{F}(\tau\eta) d\eta, \\ \mathbf{N}(\widehat{U_{free}^+}|_{\mathbb{S}^2})(\tau, P, Q_0) &= \frac{\tau}{2\pi} \int e^{i\tau\varphi\eta} \left(\tilde{a}Ai + \tau^{2/3} \tilde{b} \frac{A'_+}{A_+} Ai \right) (\tau^{2/3} \zeta_0(\eta)) \hat{F}(\tau\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Ici $\tilde{b}$ est un symbole elliptique dont la contribution principale vaut $a|_{\partial\Omega} \times \partial_r \zeta|_{\partial\Omega}$. Notons que le facteur $\tilde{a}$ d'Airy dans les deux formules est exactement le même. La différence de ces deux dernières formules donne la forme de la restriction au bord de la transformée de Fourier en temps de $\partial_\nu U^+$ près du contour apparent, qu'on va ensuite introduire dans l'intégrale (4.6) (où l'intégration est restreinte à un voisinage de $\mathcal{C}_{Q_0}$). Ainsi, on trouve, pour $P = (1, \varphi, \cdot)$ près de $\mathcal{C}_{Q_0}$ sur $\mathbb{S}^1$,

$$\partial_\nu U^+(\tilde{t}, P, Q_0) = \int e^{i\tilde{t}\tau} \frac{\tau}{2\pi} \int e^{i\tau\varphi\eta} \tau^{2/3} \tilde{b}(\varphi, \tau) \frac{\hat{F}(\tau\eta)}{A_+(\tau^{2/3} \zeta_0(\eta))} d\eta d\tau, \quad (4.10)$$

en utilisant le fait que U_{free}^+ , et donc U^+ , sont invariantes par rotation. On souhaite maintenant déterminer la localisation spectrale $\chi(hD_t)U_D^\#(t, Q, Q_0)$, où $\chi \in C_0^\infty$ est à support près de 1 (et où $U_D^\#$

est la restriction de l'intégrale (4.6) à $|P - P_0| < 2\varepsilon_0$, où $P_0 = (1, \varrho_0, \cdot)$ et un point de $\mathcal{C}_{Q_0}$). Soit $Q = (r_Q, \varphi_Q, \omega_Q)$ un point arbitraire de Ω et $P = (1, \varphi, \omega)$ un point du bord, alors

$$|P - Q| := \left(1 + r_Q^2 - 2r_Q \sin \varphi \sin \varphi_Q \cos(\omega - \omega_Q) - 2r_Q \cos \varphi \cos \varphi_Q\right)^{1/2} := \psi(\varphi, \omega, Q).$$

On obtient

$$\begin{aligned} \chi(hD_t)U_D^\#(t, Q, Q_0) &:= \frac{\chi(hD_t)}{4\pi} \int_{P \in \partial\Omega} \tilde{\chi}_0(|P - P_0|) \frac{\partial_\nu U^+(t - |Q - P|, P)}{|P - Q|} d\sigma(P) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int e^{it\tau} \chi(h\tau) \tau \int_{(1, \varphi, \omega) \in \partial\Omega} \frac{\tilde{\chi}_0(\varphi - \varphi_0)}{\psi(\varphi, \omega, Q)} e^{-i\tau\psi(\varphi, \omega, Q)} \int e^{i\tau\varphi\eta} \tau^{2/3} \tilde{b}(\varphi, \tau) \frac{\hat{F}(\tau\eta)}{A_+(\tau^{2/3}\zeta_0(\eta))} d\eta d\varphi d\omega d\tau, \end{aligned}$$

où $\tilde{\chi}_0 \in C_0^\infty(-2\varepsilon_0, 2\varepsilon_0)$. Si on note

$$I_D(\tau, Q, Q_0) = \int_{(1, \varphi, \omega) \in \partial\Omega} \frac{\tilde{\chi}_0(\varphi - \varphi_0)}{\psi(\varphi, \omega, Q)} e^{-i\tau\psi(\varphi, \omega, Q)} \int e^{i\tau\varphi\eta} \tau^{2/3} \tilde{b}(\varphi, \tau) \frac{\hat{F}(\tau\eta)}{A_+(\tau^{2/3}\zeta_0(\eta))} d\eta d\varphi d\omega,$$

on est réduit à montrer que $I_D(\tau, Q, Q_0) \lesssim \frac{1}{t}$, uniformément par rapport à Q, Q_0 et t tel que

$$\text{dist}(Q_0, B_3(0, 1)) + \text{dist}(Q_0, B_3(0, 1)) \leq t \leq \text{dist}(Q_0, B_3(0, 1)) + \text{dist}(Q_0, B_3(0, 1)) + C_0, \quad (4.11)$$

où C_0 est une constante dépendant seulement du diamètre de l'obstacle. Cette réduction est obtenue en utilisant, d'une part, la vitesse finie de propagation pour les ondes, et d'autre part le Théorème [22, Thm. 1.6], dû à Melrose et valable dans tout domaine non-captant en dimension impaire.

La phase de $\hat{F}_\tau(\tau\eta)$ vaut, d'après (4.9), $\eta\varphi_0 - |P_0 - Q_0| = (1 + r_0^2 - 2r_0 \cos \varphi_0)^{1/2} = (r_0^2 - 1)^{1/2}$ (car $\cos \varphi_0 = \frac{1}{r_0}$ d'après (4.5)). Par conséquent, la phase de I_D vaut

$$-\psi(\varphi, \omega, Q) + (\varphi - \varphi_0)\eta - \sqrt{r_0^2 - 1} + \frac{2}{3}(-\zeta_0(\eta))^{3/2},$$

où le dernier terme provient du facteur $A_+^{-1}(\tau^{2/3}\zeta_0(\eta))$ (lorsque celui-là oscille). La phase ψ admet un unique point critique dégénéré en φ . Les points critiques en ω vérifient $\partial_\omega |P - Q| = \frac{r_Q}{|P - Q|} \sin(\varphi) \sin(\varphi_Q) \sin(\omega - \omega_Q)$.

- Si $\sin(\varphi_Q) = 0$ la dérivée s'annule partout. Les points Q, O et Q_0 sont alors colinéaires : si $\varphi_Q = 0$, alors Q, Q_0 se trouvent tous les deux sur l'axe ON et les estimations sont triviales. Si $\varphi_Q = \pi$, alors le point Q se trouve sur OS (en particulier, lorsque $r = r_0 \sim h^{-1/3}$, il s'agit du point du Poisson). Pour φ près de φ_0 , la phase a un point critique dégénéré, ce qui fait apparaître un facteur $\tau^{-1/3}$; la phase en η induit un facteur $\tau^{-2/3}$ (en effet, la contribution principale de l'intégrale en η vient d'un voisinage de taille $\tau^{-2/3}$ de 1). Après une analyse fine des intégrales près de $(\varphi_c, 1)$ (qui sera un peu plus détaillée au point de Poisson en dimension $d \geq 4$ ci-dessous) on se réduit à vérifier que le facteur restant $\frac{\tau^{1/3}}{\sqrt{\tau^2 - 1}\sqrt{r_0^2 - 1}}$ est $\lesssim \frac{1}{t}$, ce qui s'avère vrai pour t vérifiant (4.11), uniformément par rapport à Q, Q_0 hors d'un petit voisinage du bord.
- Si $\sin(\varphi_Q) \neq 0$ les points critiques vérifient $\sin(\omega - \omega_Q) = 0$ donc $\omega = \omega_Q$ ou $\omega = \omega_Q + \pi$. Les points stationnaires $P = (1, \varphi, \omega_c)$ se trouvent sur un arc de cercle dans le plan $Q_0 - O - Q$, où $O = \{0\} \in \mathbb{R}^3$: si $\tau \sin(\varphi_Q) < \tau^\epsilon$, alors on se ramène au cas précédent (car Q se situe dans un petit cône d'angle $\tau^{-1+\epsilon}$ autour de l'axe OS), sinon la phase stationnaire en ω s'applique. La valeur critique de la phase est stationnaire en η lorsque $\varphi = \varphi_0$ et a un unique

point dégénéré d'ordre 2 en φ lorsque $\cos(\varphi - \varphi_Q) = \frac{1}{r}$ avec $\sin(\varphi_Q - \varphi) > 0$ (où le signe dépend du signe de η) ce qui revient à $\varphi_c = \varphi_Q - \arccos \frac{1}{r}$. Notons que lorsque $\varphi_c = \varphi_0$ (donc $\varphi_Q - \varphi_0 = \arccos \frac{1}{r}$), le rayon Q_0Q est tangent au bord (et dans ce cas $\eta = 1$), alors que si $\varphi_c = \varphi_Q - \arccos \frac{1}{r} > \varphi_0$, le point Q se trouve dans l'ombre (ou, si inégalité inverse, dans la partie illuminée). En étudiant séparément chaque cas on peut conclure.

Lorsque un des deux points Q, Q_0 est très proche de $\partial\Omega$, on peut supposer (par symétrie de la fonction de Green) qu'il s'agit du point d'observation Q et on utilise la paramétrice de Melrose Taylor directement (comme dans [34]), sans passer par la formule de Kirchhoff (qui était particulièrement utile dans le cas précédent car elle nous ramenait à travailler près du bord, où on disposait du Théorème 14). Pour Q proche de $\mathcal{C}_{Q_0}$ on a, modulo $O(\tau^{-\infty})$ (comme dans [38, Prop.4.1]),

$$\begin{aligned} \widehat{U}^+(\tau, Q, Q_0) &= \frac{\tau}{2\pi} \int e^{i\tau\varphi\eta} \left(aAi(\tau^{2/3}\zeta(r, \eta)) + b\tau^{-1/3}Ai'(\tau^{2/3}\zeta(r, \eta)) \right) \hat{F}_\tau(\tau\eta) d\eta \\ &\quad - \frac{\tau}{2\pi} \int e^{i\tau\theta(\varphi, \eta)} \left(aA_+(\tau^{2/3}\zeta(r, \eta)) + b\tau^{-1/3}A'_+(\tau^{2/3}\zeta(r, \eta)) \right) \frac{Ai(\tau^{2/3}\zeta_0(\eta))}{A_+(\tau^{2/3}\zeta_0(\eta))} \hat{F}_\tau(\tau\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (4.12)$$

où F_τ est comme dans (4.9). Dans [34], c'est sous cette forme qu'on représente la solution des ondes pour ensuite calculer ses normes de Strichartz localement en temps. L'intégrale sur la première ligne dans (4.12) désigne, comme on l'a déjà vu, l'onde libre. Le deuxième terme devient parfaitement explicite en remplaçant F_τ par sa formule, et on est ramené à borner uniformément par rapport à Q_0, Q et t vérifiant (4.11) l'intégrale suivante, où $(r, \varphi, \cdot)$ sont cette fois les coordonnées de Q :

$$\begin{aligned} \frac{t}{\sqrt{r_0^2 - 1}} \frac{e^{i\tau(\varphi - \varphi_0 - \sqrt{r_0^2 - 1})}}{2\pi} \tau^{2/3} \int e^{i\tau(\varphi - \varphi_0)(1 - \eta)} \tilde{\chi}_1(\eta) f(\eta, \tau) \\ \times \frac{Ai(\tau^{2/3}\zeta_0(\eta))}{A_+(\tau^{2/3}\zeta_0(\eta))} \left(aA_+(\tau^{2/3}\zeta(r, \eta)) + b\tau^{-1/3}A'_+(\tau^{2/3}\zeta(r, \eta)) \right) d\eta. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Puisque $\frac{2}{3}(-\zeta(r, \eta))^{3/2} \sim |r - \eta|$, et puisque la fonction d'Airy $Ai(z)$ oscille pour $z \leq -2$, il faudra analyser séparément cette intégrale selon si $-\tau^{2/3}\zeta(r, \eta)$ est plus petit ou plus grand que 2 et pareil pour $-\tau^{2/3}\zeta_0(\eta)$, ce qui réduit l'analyse à η dans un voisinage de taille $\tau^{-2/3}$ de 1 ou bien hors d'un tel voisinage, comme dans le cas précédent. Cette fois c'est la partie $|-\tau^{2/3}\zeta_0(\eta)| \geq 2$ qui donne la contribution principale et, dans ce cas on utilise $Ai(z) = \sum e^{\pm i\pi/3} A_\pm(z)$ pour obtenir deux contributions avec phases $(\varphi - \varphi_0)(1 - \eta) - \frac{2}{3}(-\zeta(r, \eta))^{3/2}$ et $(\varphi - \varphi_0)(1 - \eta) - \frac{2}{3}(-\zeta(r, \eta))^{3/2} + \frac{4}{3}(-\zeta_0(\eta))^{3/2}$. On étudie séparément ces contributions, qui ont, chacune, des points critiques non-dégénérés cette fois et on conclut.

Lorsque les deux points sont très près de $\partial\Omega$, la paramétrice de Melrose et Taylor n'est d'aucune utilité. On décompose la donnée δ_{Q_0} selon les harmoniques sphériques $Y_{m,j}$ (qui forment une base de L^2 de fonctions propres de $-\Delta_{S^2}$ est sont associées aux valeurs propres $\mu = m(m+1)$) et on résout une équation de Bessel pour obtenir le noyau de Green de l'opérateur différentiel $L_\nu = \partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r + (\tau^2 - \frac{\mu^2}{r^2})$ sous la forme suivante, pour $r \geq s$,

$$G_{m+1/2}(r, s, \tau) = \frac{\pi}{2i} (rs)^{-1/2} \left(J_{m+1/2}(s\tau) - \frac{J_{m+1/2}(\tau)}{H_{m+1/2}^{(1)}(\tau)} H_{m+1/2}^{(1)}(s\tau) \right) H_{m+1/2}^{(1)}(r\tau), \quad m \in \mathbb{N}^*, \quad (4.14)$$

où $H_{m+1/2}^{(1)}(z)$ est la fonction de Hankel et $J_{m+1/2}(z)$ la fonction de Bessel. En conséquence, pour $|Q| \geq |Q_0|$,

$$\chi(hD_t)U(t, Q, Q_0) = \sum_{m \geq 0} Z_{\frac{Q}{|Q|}}^m \left(\frac{Q_0}{|Q_0|} \right) \int_0^\infty e^{it\tau} \chi(h\tau) G_{m+1/2}(|Q|, |Q_0|, \tau) d\tau, \quad (4.15)$$

où $Z_{(\varphi, \omega)}^m((\varphi', \omega')) := \sum_{j=1}^{2m+1} Y_{m,j}(\varphi, \omega) \overline{Y_{m,j}(\varphi', \omega')}$ vérifient $|Z_{(\varphi, \omega)}^m((\varphi', \omega'))| \leq \frac{2m+1}{4\pi}$. Avec $\nu := m + 1/2$, on décompose la somme (4.15) dans plusieurs régimes, correspondant à $\nu/\tau \ll 1$ (cas purement transverse), $\nu/\tau \in (\varepsilon, 1/\varepsilon)$, $\nu/\tau \gg 1$ (cas elliptique) : le deuxième régime est de loin le plus intéressant (et inclut la situation la plus délicate des valeurs de ν telles que $\tau = \nu + \nu^{1/3}w$ avec w borné), lorsque les fonctions de Hankel se comportent comme suit : (voir [1, 9.3.35, 9.3.37])

$$H_\nu^{(1)}(\nu\rho) \simeq 2e^{-i\pi/3} \left(\frac{4\tilde{\zeta}}{1-\rho^2} \right)^{1/4} \left(\nu^{-1/3} A_+(\nu^{2/3}\tilde{\zeta}) \sum_{j \geq 0} a_j(\tilde{\zeta}) \nu^{-2j} + \nu^{-5/3} A'_+(\nu^{2/3}\tilde{\zeta}) \sum_{j \geq 0} b_j(\tilde{\zeta}) \nu^{-2j} \right), \quad (4.16)$$

$$J_\nu(\nu\rho) \simeq \left(\frac{4\tilde{\zeta}}{1-\rho^2} \right)^{1/4} \left(\nu^{-1/3} Ai(\nu^{2/3}\tilde{\zeta}) \sum_{j \geq 0} a_j(\tilde{\zeta}) \nu^{-2j} + \nu^{-5/3} Ai'(\nu^{2/3}\tilde{\zeta}) \sum_{j \geq 0} b_j(\tilde{\zeta}) \nu^{-2j} \right), \quad (4.17)$$

où la fonction $\tilde{\zeta}$ est la même que dans (4.8) (voir [1, 9.3.38, 9.3.39]). On obtient des estimées de dispersion pour $\chi(hD_t)U$ en séparant les différents régimes de τ et ν , ce qui correspond essentiellement aux intégrales précédentes en η : si avant on étudiait séparément des voisinages $\tau^{-2/3}$ de 1, ici on découpe selon si $\rho = \nu/\tau$ appartient à un voisinage $\tau^{-2/3}$ de 1 (pour $\nu \sim \tau$, on écrit $\tau = \nu + \nu^{1/3}w$ et on départage selon si w reste borné ou s'il est grand).

Lorsqu'on considère de petites fréquences $\tau \lesssim 1$, il existe une approche générique qui marche quelle que soit la forme du bord : à partir de la solution de l'équation de Helmholtz avec condition de Dirichlet à l'extérieur d'un obstacle compact dont le bord est de classe C^2 on obtient une représentation de la solution de l'équation des ondes (qui utilise les opérateurs de simple et double couche) et on en déduit des estimations à temps (long) fixé.

Lorsqu'on remplace la boule par un obstacle strictement convexe quelconque, la formule générale de F_τ n'est pas très utile. On travaille localement dans un voisinage d'un point du contour apparent $\mathcal{C}_{Q_0}$, et, en utilisant le repère de Serret-Frenet, on décrit localement la forme de la restriction au bord (près de $\mathcal{C}_{Q_0}$) de la dérivée normale de U_+ .

Quant à l'équation de Schrödinger, on obtient une paramétrice à partir de la solution de l'équation des ondes via la formule de Kanaï, qui s'écrit comme suit

$$V(t, Q, Q_0) = \frac{2}{t^{1/2}} \int_0^\infty e^{-i\frac{T^2}{4t}} U(T, Q, Q_0) dT, \quad (4.18)$$

where $U(T, Q, Q_0) = \cos(T\sqrt{-\Delta})(\delta_{Q_0})$ est la solution de l'équation des ondes dans Ω . Dans tous les différents régimes à traiter, cette formule permet d'obtenir des estimées de dispersions en utilisant les résultats pour les ondes.

4.1.3 Esquisse de la preuve du Théorème 13 à l'extérieur d'une boule dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 4$

Si N, S désignent le pôle Nord et le pôle Sud, soit $Q_+(r)$ un point sur l'axe ON , à distance r de O et soit $Q_-(r)$ son symétrique par rapport à O sur l'axe OS , où $O \in \mathbb{R}^d$ est le centre de la boule. On pose $r_0 \simeq h^{-1/3}$ et on considère comme points source et d'observation $Q_0 = Q_+(r_0)$ et $Q = Q_-(r_0)$. En utilisant les formules (4.2), (4.3) et (4.6) on obtient la formule de $U^\# := \square_+^{-1}(\partial_\nu U^+)$ en dimension $d \geq 4$:

$$\chi(hD_t)U^\#(t, Q, Q_0) := \int e^{it\tau} \chi(h\tau) \int_{P \in \partial\Omega} \frac{\tau^{\frac{d-3}{2}}}{|Q - P|^{\frac{d-1}{2}}} \Sigma_d(\tau|P - Q|) \widehat{\partial_\nu U^+}(\tau, P, Q_0) d\sigma(P), \quad (4.19)$$

où le dernier facteur ne dépend pas, comme déjà remarqué, de la variable rotationnelle, et, pour P proche de $\mathcal{C}_{Q_0}$ sur le bord, est toujours donné par la (même) formule (4.10) avec F_τ comme dans (4.9) (qui dépend de d et de la distance $\sqrt{r_0^2 - 1}$ entre Q_0 et son contour apparent). Puisqu'on s'intéresse uniquement à des points d'observation Q sur l'axe OS (Q sera le symétrique de Q_0 par rapport à l'origine), la distance $|P - Q|$ ne va pas dépendre elle non plus de la variable rotationnelle : si $P = (1, \varphi, \omega)$ désigne un point du bord alors $|P - Q_-(r_0)| = \sqrt{1 + r_0^2 + 2r_0 \cos \phi} \sim r_0$ pour r_0 grand. En particulier, dans l'intégrale précédente, on intègre uniquement en φ ; puisque la contribution de $|\varphi - \varphi_0| > \varepsilon_0$ va donner la dispersion usuelle de $\mathbb{R}^d$, on introduit dans cette intégrale la troncature $\tilde{\chi}_0(\varphi - \varphi_0)$ comme précédemment et on la nomme $U_D^\#$. On montre le lemme suivant :

Lemme 2. Pour $r_0 \sim h^{-1/3}$ tel que $2\tau^{1/3} \arcsin(\frac{1}{r_0}) \sim 1$ pour $h\tau$ sur le support de χ , on a, modulo $O(h^\infty)$,

$$(\chi(h\tau)U_D^\#)(\tau, Q_-(r_0), Q_+(r_0)) = \chi(h\tau)\tau^{1/3} \frac{\tau^{d-2}}{r_0^{d-1}} e^{-2i\tau(\arcsin(\frac{1}{r_0}) + \sqrt{r_0^2 - 1})} \Xi(2\tau^{1/3} \arcsin(\frac{1}{r_0}), r_0, \tau), \quad (4.20)$$

où $\Xi(\lambda)$ est elliptique pour λ dans compact de $[2^{-1/3}, 1]$. En plus, pour $t = 2(\arcsin(\frac{1}{r_0}) + \sqrt{r_0^2 - 1})$,

$$\begin{aligned} \left| \chi(hD_t)U_D^\#(t, Q_-(r_0), Q_+(r_0)) \right| &= \left| \int e^{it\tau} \chi(h\tau) (\chi(h\tau)U_D^\#)(\tau, Q_-(r_0), Q_+(r_0)) d\tau \right| \\ &\sim h^{-d} \frac{h^{\frac{d-1}{2}}}{t^{\frac{d-1}{2}}} h^{-\frac{d-3}{3}}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

L'estimation (4.21) découle immédiatement de (4.20). Pour $d = 3$ cela coïncide avec les estimations usuelles (1.5) de $\mathbb{R}^3$. Pour $d \geq 4$ on met en évidence une perte due au facteur $h^{-\frac{d-3}{3}}$ que l'on peut écrire, pour $t \sim r_0 \sim h^{-1/3}$ sous la forme $h^{-\frac{d-3}{3}} \sim (\frac{t}{h})^{\frac{d-3}{4}}$.

Pour montrer (4.20) on remplace (4.10) et (4.9) dans (4.19) pour obtenir $\chi(hD_t)U_D^\#(\tau, \cdot)$ comme suit

$$\frac{\tau^{d-2+\frac{4}{3}}}{\sqrt{r_0^2 - 1}^{d-1}} \int \chi_0((\varphi - \varphi_0)/\varepsilon) \tilde{\chi}_1(\eta) e^{i\tau(-\sqrt{1+r_0^2+2r_0 \cos \varphi} + (\varphi - \varphi_0)\alpha - \sqrt{r_0^2 - 1})} \frac{\tilde{f}(\eta, r_0, \tau)}{A_+(\tau^{2/3}\zeta_0(\eta))} d\eta d\varphi, \quad (4.22)$$

où le facteur $\frac{1}{\sqrt{r_0^2 - 1}^{d-1}}$ provient de $\frac{1}{(|Q-P||Q_0-P|)^{(d-1)/2}}$ et où $\tilde{f}$ est un symbole elliptique d'ordre 0. La phase $\sqrt{1 + r_0^2 + 2r_0 \cos \varphi}$ a un unique point critique dégénéré d'ordre deux en $\varphi = \pi - \varphi_0$ (tel que $\cos \varphi = -\cos \varphi_0$), ce qui correspond à un point du contour apparent du point d'observation $Q_-(r_0)$.

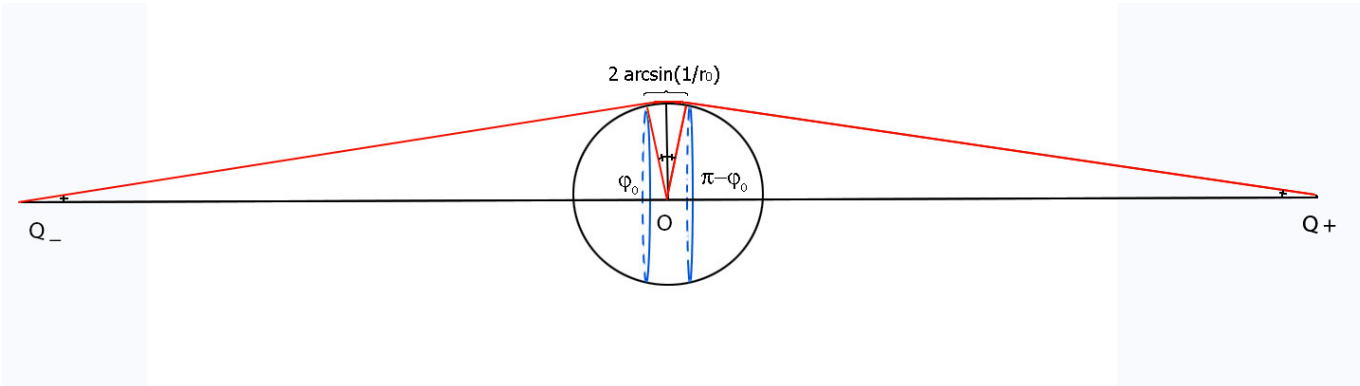


Fig. : lorsque les points sources et d'observations sont symétriques par rapport à l'origine, la distance parcourue vaut $2(\sqrt{r_0^2 - 1} + \arcsin \frac{1}{r_0})$. D'après [10], si la distance $2 \arcsin(1/r_0)$ parcourue sur le bord (en suivant une géodésique du bord) est plus grande que $\tau^{-1/3+\epsilon}$, la contribution que l'on retrouve vaut $O(\tau^{-\infty})$. En effet, étant donné la décroissance exponentielle de l'intensité de la lumière dans la zone d'ombre, dès que cette distance est $> \tau^{-1/3}$ on obtient une décroissance de la forme $(\tau^{1/3} \arcsin(1/r_0))^{-N}$, $N \geq 1$. Cela impose $2 \arcsin(1/r_0) \tau^{1/3} \leq 1$ et donc $r_0 \geq 2\tau^{1/3}$. Étant donné la présence du facteur $\sqrt{r_0^2 - 1}^{-(d-1)}$, $r_0 \sim 2h^{-1/3}$ optimise la perte dans la dispersion.

Près de $\pi - \varphi_0$, on transforme cette phase, via un changement de variables, sous la forme d'une phase d'Airy ; l'intégrale dans (4.22) devient alors essentiellement

$$\tilde{\Xi}(r_0, \tau) \int e^{2i\tau(1-\eta) \arcsin \frac{1}{r_0}} \chi_0(\tau^{2/3-\epsilon}(1-\eta)) \frac{Ai(\tau^{2/3}\zeta_0(\eta))}{A_+(\tau^{2/3}\zeta_0(\eta))} d\eta, \quad (4.23)$$

où $\tilde{\Xi}$ est elliptique et où l'intégration en φ a engendré le facteur d'Airy (ce n'est pas un hasard qu'après le changement de variables on retrouve exactement la même fonction ζ_0 du Théorème 14!). Le support en η est maintenant restreint à un voisinage de taille $\tau^{-2/3+\epsilon}$ de 1 (hors d'un tel voisinage la contribution de (4.22) vaut $O(h^\infty)$). D'après (4.8) on a $\tau^{2/3}\zeta_0(\eta) \sim -\tau^{2/3}(1-\eta)$, et les facteurs d'Airy commencent à osciller dès que $(1-\eta) > \tau^{-2/3}$ (dans le cas $(1-\eta) < 0$, la décroissance exponentielle d'Airy induit une contribution $O(h^\infty)$ également). On peut montrer la contribution provenant de l'intégration sur $(1-\eta) \sim 2^j \tau^{-2/3}$ décroît comme $C_N 2^{-jN}$ pour tout $j \geq 1$ (car, en utilisant de nouveau la décomposition $Ai(z) = \sum e^{\pm i\pi/3} A_\pm(z)$, on obtient deux phases dans (4.23) dans ce régime, $2\tau(1-\eta) \arcsin \frac{1}{r_0}$ et $2\tau(1-\eta) \arcsin \frac{1}{r_0} + \frac{4}{3}(-\zeta_0(\eta))^{3/2}$, et puisque $2\tau(1-\eta) \arcsin \frac{1}{r_0} \sim 2^j$, elles sont toutes les deux non-stationnaires en η). Par conséquent, la contribution principale de (4.23) est obtenue de l'intégrale sur $\tau^{-2/3}(1-\eta) \in [-2, 2]$ et ne s'annule évidemment pas, d'où (4.20).

Quant à l'équation de Schrödinger, une variante de la formule de Kanaï permet de déduire également des contre-exemples au point de Poisson-Arago (mais avec des distances initiales différentes : pour $\tau \sim h^{-1/2}$ tel que $h\tau^2 \sim 1$, prendre $t \sim h^{-1/3}$ et $r_0 \sim h^{-1/6}$ permet de conclure).

4.1.4 Pour aller plus loin

On indique deux domaines pas étudiés auparavant dans ce contexte pour lesquels le résultat précédent s'applique (au moins en partie) et que je souhaite mieux comprendre :

- **Dispersion à l'extérieur d'un cylindre de $\mathbb{R}^3$** : il s'agit d'un domaine avec des points sur le bord où la courbure s'annule qui représente en quelque sorte un cas préliminaire pour traiter des domaines avec bords plus généraux.
Dans un travail en collaboration avec mon post-doctorant Felice Iandoli, nous souhaitons obtenir des résultats de dispersions optimaux pour les ondes à l'extérieur d'un cylindre dans $\mathbb{R}^3$. La concentration aux "points de Poisson" est beaucoup moins importante dans ce cas qu'à l'extérieur d'une boule dans $\mathbb{R}^3$. Une difficulté nouvelle consiste à traiter le cas où les points source Q_0 et d'observation Q sont situés très près du bord, mais possiblement distants (le long du cylindre).
- **Dispersion à l'extérieur de deux boules de $\mathbb{R}^3$** : il s'agit de continuer l'analyse de la dispersion dans des situations plus complexes (dans des domaines "faiblement captants").
Avec D.Lafontaine, qui a analysé dans sa thèse les estimations de Strichartz dans ce contexte, nous avons récemment commencé l'étude des estimations de dispersion à l'extérieur de deux boules dans $\mathbb{R}^d$ (qui aura pour généralisation naturelle le cas de deux obstacles strictement

convexes). Dans la construction de paramétrice d'Ikawa pour les ondes à l'extérieur de deux obstacles convexes, on obtient une solution comme somme d'intégrales oscillantes qui représentent chacune la solution entre deux réflexions successives entre les deux obstacles ; on ne considère que des rayons transverses proche d'un rayon captée, et la trajectoire est décrite par les phases de ces intégrales. La preuve de D.Lafontaine s'appuie sur des estimations dispersives qu'on obtient uniquement en temps $\epsilon |\log h|$ avec $\epsilon > 0$ suffisamment petit, et où $\frac{1}{h}$ désigne la fréquence. Pour obtenir des estimées de dispersion au delà d'un temps logarithmique, il faut pouvoir appliquer le théorème de phase stationnaire dans chacune de ces intégrales, mais la construction d'Ikawa ne permet pas d'avoir un contrôle suffisamment "bon" sur les dérivées de ces phases après un grand nombre de réflexions au bord. Or, un tel rayon (issu d'un voisinage du rayon capté et selon un angle très petit), quitte un voisinage du bord (donc des deux obstacles) dans un temps $M |\log(h)|$, pour $M > 1$. Il reste à couvrir le *gap* pour t entre $\epsilon |\log(h)|$ et $M |\log(h)|$, mais pour cela il est indispensable de revoir entièrement la construction pour obtenir un meilleur contrôle de la phase.

A l'extérieur de deux boules (de rayons différents) de $\mathbb{R}^d$, nous pouvons décrire les phases de façon à pouvoir calculer explicitement leurs dérivées et obtenir des bornes "convenables" aussi pour des temps t proches des temps de sortie (le temps de sortie := le temps nécessaire pour la dernière réflexion au bord avant de quitter les obstacles). Nous mettons ainsi en évidence une vraie différence par rapport aux estimations obtenues sur les phases "générales", qui nous permet d'obtenir la dispersion pour tout temps en $d = 3$. Il reste cependant plusieurs questions ouvertes, comme, par exemple : (1) En dimension $d \geq 4$, l'ajout d'obstacles supplémentaires fait-il apparaître de nouveaux phénomènes de refocalisation, ou bien les seuls contre-exemples aux estimations de dispersion sont-ils encore les points de Poisson-Arago ? (2) L'estimation dispersive est-elle valable sans perte à l'extérieur de plusieurs convexes génériques ?

Références

- [1] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. *Handbook of mathematical functions, with formulas, graphs, and mathematical tables*. Edited by Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. Dover Publications Inc., New York, 1966.
- [2] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary. *S.I.A.M. Journal of Control and Optimization*, (305) :1024–1065, 1992.
- [3] Matthew D. Blair, Hart F. Smith, and Christopher D. Sogge. On Strichartz estimates for Schrödinger operators in compact manifolds with boundary. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136(1) :247–256 (electronic), 2008.
- [4] Matthew D. Blair, Hart F. Smith, and Christopher D. Sogge. Strichartz estimates for the wave equation on manifolds with boundary. *Ann.Inst.H.Poincaré, Anal.Non Linéaire*, 26 :1817–1829, 2009.
- [5] Nicolas Burq. Smoothing effect for Schrödinger boundary value problems. *Duke Math. J.*, 123(2) :403–427, 2004.
- [6] Thierry Cazenave and Fred B. Weissler. The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s . *Nonlinear Anal.*, 14(10) :807–836, 1990.
- [7] J. Ginibre and G. Velo. The global Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation revisited. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 2(4) :309–327, 1985.

- [8] J. Ginibre and G. Velo. Smoothing properties and retarded estimates for some dispersive evolution equations. *Comm. Math. Phys.*, 144(1) :163–188, 1992.
- [9] J. Ginibre and G. Velo. Generalized Strichartz inequalities for the wave equation. In *Partial differential operators and mathematical physics (Holzhau, 1994)*, volume 78 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 153–160. Birkhäuser, Basel, 1995.
- [10] Thierry Hargé and Gilles Lebeau. Diffraction par un convexe. *Invent. Math.*, 118(1) :161–196, 1994.
- [OI5] O. Ivanovici and F. Planchon. Square function and heat flow estimates on domains. *Comm. Partial Differential Equations*, 42(9) :1447–1466, 2017.
- [OI1] Oana Ivanovici. Precise smoothing effect in the exterior of balls. *Asymptot. Anal.*, 53(4) :189–208, 2007.
- [OI4] Oana Ivanovici. Counterexamples to Strichartz estimates for the wave equation in domains. *Math. Ann.*, 347(3) :627–673, 2010.
- [OI2] Oana Ivanovici. On the Schrödinger equation outside strictly convex obstacles. *Anal. PDE*, 3(3) :261–293, 2010.
- [OI6] Oana Ivanovici. Counterexamples to the Strichartz inequalities for the wave equation in general domains with boundary. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 14(5) :1357–1388, 2012.
- [OI12] Oana Ivanovici. Dispersive estimates for the semi-classical Schrödinger equation inside strictly convex domains. preprint <https://arxiv.org/abs/2009.13810>, 2020.
- [OI14] Oana Ivanovici. Long time dispersive estimates for the wave and Klein-Gordon equations inside strictly convex domains. preprint, 2020.
- [OI13] Oana Ivanovici, Richard Lascar, Gilles Lebeau, and Fabrice Planchon. Dispersion for the wave equation inside strictly convex domains II : the general case, 2016. [arXiv:math/1605.08800](https://arxiv.org/abs/1605.08800).
- [OI9] Oana Ivanovici and Gilles Lebeau. Dispersion for the wave and the Schrödinger equations outside strictly convex obstacles and counterexamples. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 355(7) :774–779, 2017.
- [OI15] Oana Ivanovici and Gilles Lebeau. Dispersion estimates for the wave and Schrödinger equations outside a ball and counterexamples, 2020. preprint.
- [OI7] Oana Ivanovici, Gilles Lebeau, and Fabrice Planchon. Dispersion for the wave equation inside strictly convex domains I : the Friedlander model case. *Ann. of Math. (2)*, 180(1) :323–380, 2014.
- [OI8] Oana Ivanovici, Gilles Lebeau, and Fabrice Planchon. Estimations de Strichartz pour l’équation des ondes dans un domaine strictement convexe. In *PDE’s, dispersion, scattering theory and control theory*, volume 30 of *Sémin. Congr.*, pages 69–79. Soc. Math. France, Paris, 2017.
- [OI10] Oana Ivanovici, Gilles Lebeau, and Fabrice Planchon. New counterexamples to Strichartz estimates for the wave equation on a 2D model convex domain. preprint, <https://arxiv.org/abs/2008.02716>, 2020.
- [OI11] Oana Ivanovici, Gilles Lebeau, and Fabrice Planchon. Strichartz estimates for the wave equation inside strictly convex 2d model domain. preprint <https://arxiv.org/abs/2008.03598>, 2020.
- [OI3] Oana Ivanovici and Fabrice Planchon. On the energy critical Schrödinger equation in 3D non-trapping domains. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 27(5) :1153–1177, 2010.

- [11] Lev Kapitanski. Global and unique weak solutions of nonlinear wave equations. *Math. Res. Lett.*, 1(2) :211–223, 1994.
- [12] Tosio Kato. On nonlinear Schrödinger equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 46(1) :113–129, 1987.
- [13] Markus Keel and Terence Tao. Endpoint Strichartz estimates. *Amer. J. Math.*, 120(5) :955–980, 1998.
- [14] Joseph B. Keller. Geometrical Theory of Diffraction. *J. of the Optical Soc. of America*, 52(2) :116–130, 1962.
- [15] Rowan Killip, Monica Visan, and Xiaoyi Zhang. Quintic NLS in the exterior of a strictly convex obstacle. *Amer. J. Math.*, 138(5) :1193–1346, 2016.
- [16] G. Lebeau. Régularité gevery 3 pour la diffraction. *Comm. PDE*, 9(15) :1437–1494, 1984.
- [17] G. Lebeau. Contrôle de l’équation de Schrödinger. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 71(3) :267–291, 1992.
- [18] Dong Li, Hart Smith, and Xiaoyi Zhang. Global well-posedness and scattering for defocusing energy-critical NLS in the exterior of balls with radial data. *Math. Res. Lett.*, 19(1) :213–232, 2012.
- [19] Hans Lindblad and Christopher D. Sogge. On existence and scattering with minimal regularity for semilinear wave equations. *J. Funct. Anal.*, 130(2) :357–426, 1995.
- [20] Len Meas. Dispersive estimates for the wave equation inside cylindrical convex domains : a model case. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 355(2) :161–165, 2017.
- [21] R. B. Melrose. Equivalence of glancing hypersurfaces. *Invent. Math.*, 37(3) :165–191, 1976.
- [22] R. B. Melrose. Singularities and energy decay in acoustical scattering. *Duke Mathematical Journal*, 46(1) :43–59, 1979.
- [23] R. B. Melrose and J. Sjöstrand. Singularities of boundary value problems. I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 31(5) :593–617, 1978.
- [24] R. B. Melrose and J. Sjöstrand. Singularities of boundary value problems. II. *Comm. Pure Appl. Math.*, 35(2) :129–168, 1982.
- [25] Richard B. Melrose and Michael E. Taylor. Near peak scattering and the corrected Kirchhoff approximation for a convex obstacle. *Adv. in Math.*, 55(3) :242–315, 1985.
- [26] Richard B. Melrose and Michael E. Taylor. The radiation pattern of a diffracted wave near the shadow boundary. *Comm. Partial Differential Equations*, 11(6) :599–672, 1986.
- [27] Richard B. Melrose and Michael E. Taylor. Boundary problems for the wave equations with grazing and gliding rays, 1987.
- [28] Fabrice Planchon and Luis Vega. Bilinear virial identities and applications. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 42 :263–292, 2009. [arXiv:math/0712.4076](https://arxiv.org/abs/math/0712.4076).
- [29] Fabrice Planchon and Luis Vega. Bilinear virial identities and applications. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 42(2) :261–290, 2009.
- [30] Hart F. Smith. A parametrix construction for wave equations with $C^{1,1}$ coefficients. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 48(3) :797–835, 1998.
- [31] Hart F. Smith. Spectral cluster estimates for $C^{1,1}$ metrics. *Amer. J. Math.*, 128(5) :1069–1103, 2006.
- [32] Hart F. Smith and Christopher D. Sogge. L^p regularity for the wave equation with strictly convex obstacles. *Duke Math. J.*, 73(1) :97–153, 1994.

- [33] Hart F. Smith and Christopher D. Sogge. L^p regularity for the wave equation with strictly convex obstacles. *Duke Math. J.*, 73(1) :97–153, 1994.
- [34] Hart F. Smith and Christopher D. Sogge. On the critical semilinear wave equation outside strictly convex obstacles. *J. Amer. Math. Soc.*, 8(4) :879–916, 1995.
- [35] Hart F. Smith and Christopher D. Sogge. On the L^p norm of spectral clusters for compact manifolds with boundary. *Acta Math.*, 198(1) :107–153, 2007.
- [36] Robert S. Strichartz. Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations. *Duke Math. J.*, 44(3) :705–714, 1977.
- [37] Daniel Tataru. Strichartz estimates for second order hyperbolic operators with nonsmooth coefficients. III. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2) :419–442 (electronic), 2002.
- [38] Maciej Zworski. High frequency scattering by a convex obstacle. *Duke Math. J.*, 61(2) :545–634, 1990.