Jean-Marc Delort
Département de mathématiques
LAGA – Université Paris 13
99, Avenue Jean-Baptiste Clément
93430 Villetaneuse
France

Villetaneuse, le 18 janvier 2021

Rapport sur le mémoire d'habilitation présenté par Oana Ivanovici

Oana Ivanovici présente dans son mémoire un ensemble impressionnant de travaux concernant les propriétés dispersives des équations d'onde et de Schrödinger linéaires à l'intérieur et à l'extérieur d'un domaine strictement convexe.

Depuis une trentaine d'années, l'étude des équations aux dérivées partielles non-linéaires dispersives a connu de spectaculaires développements. Ceux-ci sont basés en grande partie sur des "estimations de dispersion", qui témoignent du fait que les solutions des équations linéaires correspondantes ont tendance à décroître lorsque le temps augmente, tout en étalant leur support, de manière à ce que leur énergie globale reste constante. Il est donc essentiel de disposer d'inégalités précises quantifiant cet effet dispersif. De tels résultats sont désormais bien compris pour des équations sur des variétés sans bord, et, dans les cas les plus simples, pour les "domaines extérieurs" (complémentaire d'un compact convenable). Par contre, seuls des résultats très partiels étaient connus pour de telles équations dans un ouvert strictement convexes. Les travaux d'Oana Ivanovici apportent une moisson de résultats de première importance dans ce cadre là.

Les deux exemples de base d'équations dispersives sont les équations des ondes et de Schrödinger, données lorsque Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $u : \mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction de (t, x), respectivement par $(\partial_t^2 - \Delta_x)u(t, x) = 0$ et $(i\partial_t - \Delta_x)u(t, x) = 0$ (complétées lorsque $\Omega \neq \mathbb{R}^d$ par une condition de Dirichlet $u|_{\partial\Omega=0}$). La dispersion exprime, dans le cas où Ω est l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$, que si les données initiales $(u(0, \cdot), \partial_t u(0, \cdot))$ (resp. $u(0, \cdot)$) sont décroissantes lorsque x tend vers l'infini, alors la solution (ou ses dérivées) tendent uniformément vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini, avec un taux de décroissance explicite (donné par exemple dans le cas de Schrödinger par $\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty} = O(t^{-\frac{d}{2}})$). De telles estimations de dispersion permettent classiquement de montrer des "inégalités de Strichartz" qui jouent un rôle essentiel dans l'étude en temps grand des solutions d'équations d'ondes ou de Schrödinger non-linéaires.

Par ailleurs, les inégalités de dispersion ou de Strichartz admettent également des versions locales en temps, qui sont un outil fondamental pour la résolution locale de ces mêmes équations à données peu régulières. Ces versions locales en temps peuvent s'exprimer à l'aide d'une formulation semi-classique, dans lesquelles la fonction estimée est tronquée en fréquence. Pour le cas de l'équation des ondes sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, on a par exemple

$$\|\chi(h|D_x|)u(t, \cdot)\|_{L^\infty} = O\Big(h^{-d} \min\Big(1, \Big(\frac{h}{t}\Big)^{\frac{d-1}{2}}\Big)\Big), \qquad (*)$$

en désignant par χ une troncature à support compact dans $\mathbb{R}^*$ et par h le paramètre semi-classique $h \in]0,1[$. Une telle inégalité donne une estimation non triviale lorsque $t \in]0,1[$ et que $h \to 0$, estimation qui s'étend sans changement au cas où la variable d'espace x décrit au lieu de $\mathbb{R}^d$ une variété de dimension d *sans bord*.

Les travaux d'Oana Ivanovici depuis sa thèse sont consacrés à l'obtention de telles estimations de dispersion semi-classiques sur une *variété à bord*, à savoir un ouvert strictement convexe ou le complémentaire d'un compact strictement convexe. La présence du bord est une difficulté conceptuelle majeure, qui a une influence essentielle sur le type d'inégalités que l'on peut espérer prouver, et qui rend leur démonstration beaucoup plus délicate que celles de leurs contreparties sur les variétés sans bord.

Nous décrivons ci-dessous les principaux résultats que l'on doit à Oana Ivanovici (et ses collaborateurs) au cours des années écoulées depuis sa soutenance de thèse.

• Estimations de dispersion à l'intérieur d'un convexe strict pour l'équation des ondes

Le problème étudié est le suivant : Soit Ω un ouvert strictement convexe de $\mathbb{R}^d$, à bord C^∞, a un point de Ω et u_a la solution de l'équation des ondes $(\partial_t^2 - \Delta_x)u_a = 0$ avec $u_a|_{\mathbb{R}\times\partial\Omega} = 0$, $u_a(0,\cdot) = \delta_a$ (masse de Dirac en a), $\partial_t u_a(0,\cdot) = 0$. Il s'agit d'obtenir une estimation pour $\|\chi(-h^2\Delta)u_a(t,\cdot)\|_{L^\infty}$ lorsque $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, $h \in]0,1[$, $t \in [-T_0, T_0]$, par une quantité explicite (et si possible optimale) en a, h, t, qui généralise les bornes $(*)$ du cas sans bord.

Un premier travail d'Oana Ivanovici et de ses collaborateurs, publié il y a quelques années dans *Annals of Math.*, traite le cas du “modèle de Friedlander”. Il s'agit d'un opérateur sur le demi-espace $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^{d-1}$ muni des coordonnées (x,y), de la forme $\Delta_F = \partial_x^2 + (1+x)\Delta_y$, qui approche, après passage dans une carte locale, le laplacien usuel à l'intérieur d'une boule. Le résultat principal est une estimation de dispersion de la forme

$$\|\chi(-h^2\Delta_F)u_a(t,\cdot)\|_{L^\infty} = O(h^{-d}\min\bigl(1, (h/t)^{\frac{d-2}{2}}\gamma(t,h,a)\bigr)$$

avec γ explicite, estimation qui est de plus optimale.

La démonstration du résultat, difficile et subtile, est aussi importante que l'énoncé lui-même. Elle repose sur la construction d'une paramétrix à l'intérieur du domaine strictement convexe, i.e. d'une solution approchée donnée sous la forme d'une intégrale de phase. Cette construction représente un véritable tour de force car, à la différence des paramétrix “classiques” (dans le cas des variétés sans bord ou même à *l'extérieur* d'un convexe), la géométrie sous-jacente aux phases permettant d'exprimer la paramétrix est singulière, avec une complexité croissante de ces singularités lorsque le temps augmente. Par ailleurs, cette paramétrix ne permet pas à elle seule d'obtenir les estimations de dispersion recherchées dans tous las régimes et doit être combinée à une approche spectrale pour démontrer le résultat final.

Plus récemment, Oana Ivanovici et ses co-auteurs ont généralisé leur estimation de dispersion au cas de l'équation des ondes dans un domaine borné strictement convexe. Le cas modèle précédemment traité fournit un canevas à la démonstration, mais nombre de difficultés supplémentaires doivent être surmontées : construction (encore) plus délicate de la paramétrix, utilisation de quasi-modes en lieu et place de l'approche spectrale directe qui n'est possible que pour le modèle de Friedlander.

Les inégalités de dispersion à l'intérieur d'un domaine *borné* strictement convexe ne peuvent être vraies que pour des intervalles de temps bornés. Par contre, le modèle de Friedlander étant posé sur un demi-espace (avec condition de Dirichlet au bord), rien n'empêche a priori que des estimations dispersives n'y soient également valables pour des intervalles de temps infinis. Oana Ivanovici prouve de telles estimations en temps grand pour l'équation de Klein-Gordon dans cette situation.

• **Estimations de Strichartz à l'intérieur d'un convexe**

Les inégalités de Strichartz pour une solution u de l'équation des ondes sur $\mathbb{R}^d$ s'écrivent, par exemple lorsque $d = 3$, sous la forme

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^q([0,T],L^r(\mathbb{R}^3))} \le C\big[\|\nabla u(0,\cdot)\|_{L^2} + \|\partial_t u(0,\cdot)\|_{L^2}\big]$$

pour des exposants p, q, r vérifiant $\frac{2}{q} + \frac{2}{r} \le 1$, $(q,r) \ne (2,\infty)$. Ces inégalités, également valables sur une variété sans bord, y compris en dimension quelconque $d \ge 2$ (avec adaptation convenable des inégalités vérifiées par les exposants) découlent classiquement des estimations de dispersion. Dans le cas d'un ouvert strictement convexe, les inégalités de dispersion prouvées par Oana Ivanovici et ses collaborateurs fournissent donc automatiquement des inégalités de Strichartz. Ces inégalités présentent une perte inévitable, que l'on notera $\delta(d)$ en dimension d, par rapport à celles valables dans le cas sans bord. On souhaite évidemment que cette perte soit aussi petite que possible. L'application de la méthode usuelle permettant de déduire inégalités de Strichartz des inégalités de dispersion (la méthode TT^*), fournit une perte $\delta(d) = \frac{1}{4}$ qui est susceptible d'améliorations. En effet, Oana Ivanovici raffine cette borne inférieure en utilisant la connaissance précise de la paramétrix qu'elle a construite, et peut ainsi réduire cette perte à $\delta(2) = \frac{1}{9}$, $\delta(3) = \frac{1}{6}$ pour le modèle de Friedlander et, dans le cas d'un ouvert strictement convexe quelconque, obtenir $\delta(d) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4d} - 0$ en toute dimension $d \ge 3$. Elle doit pour cela comprendre de manière très fine les singularités apparaissant à des temps discrets dans la paramétrix du problème.

La question de l'optimalité des pertes $\delta(d)$ précédentes se pose tout naturellement. Dans cette direction, Oana Ivanovici construit des minorants de la perte optimale. Par exemple, en dimension deux pour le modèle de Friedlander, pour lequel elle a obtenu un perte de $\frac{1}{9}$, elle montre que la perte optimale est au moins de $\frac{1}{10}$.

• **Équation de Schrödinger**

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ on dispose d'inégalités de dispersion et de Strichartz pour de nombreuses autres équations dispersives, notamment l'équation de Schrödinger. Sur un domaine borné, cette dernière ne peut admettre de telles estimations dans un sens classique, à cause de sa vitesse infinie de propagation. Toutefois, de telles bornes peuvent être récupérées pour l'équation de Schrödinger semi-classique $(h\partial_t - h^2\Delta)u = 0$ $(h \in]0,1[)$ sur des temps de l'ordre de $1/h$, lorsque les données initiales sont localisées à fréquence $1/h$: un tel régime permet en effet de se ramener à une vitesse finie de propagation (qui dépend néanmoins de la fréquence $1/h$).

Il est donc naturel d'envisager la question des estimations de ce type pour l'équation de Schrödinger à l'intérieur d'un convexe (avec condition de Dirichlet au bord). Oana Ivanovici a résolu ce problème pour un opérateur modèle, en obtenant des estimations de dispersion du même type que celles qui valent sur une variété sans bord, mais avec une perte supplémentaire. L'idée de la preuve est la même que pour l'équation des ondes, à savoir l'utilisation d'une paramétrix précisée, avec cette difficulté supplémentaire que la vitesse de propagation dépend de la fréquence. Cela complexifie nettement la démonstration car le nombre de réflexions au bord qui doivent être prises en compte dans l'analyse croît désormais avec la fréquence. Bien entendu, une fois les estimations de dispersion établies, des inégalités de Strichartz semi-classiques en découlent.

• **Estimations de dispersion *hors* d'un convexe strict**

Les travaux de ce projet d'habilitation décrits ci-dessus concernent l'étude de l'équation de Schrödinger ou des ondes dans un ouvert strictement convexe. Oana Ivanovici a également étudié la dispersion dans le complémentaire d'un obstacle strictement convexe. Dans ce cas, alors que des inégalités de Strichartz optimales sont connues depuis des années, les estimations de dispersion restaient entièrement ouvertes.

Dans la mesure où, dans le complémentaire d'un convexe, l'optique géométrique ne fait pas apparaître de possibilité de concentration des rayons, et donc de l'énergie, il semblerait naturel de conjecturer que, tant pour l'équation des ondes que pour l'équation de Schrödinger, les mêmes estimations de dispersion que celles qui valent dans l'espace libre peuvent être escomptées. Dans un travail en collaboration avec Gilles Lebeau, Oana Ivanovici démontre que c'est bien le cas dans le complémentaire d'une boule de $\mathbb{R}^3$, mais que c'est *faux* dans le complémentaire d'une boule de $\mathbb{R}^d$ avec $d \geq 4$. Là encore, l'obtention de ces résultats repose sur la construction d'une paramétrix de l'équation des ondes (ou de Schrödinger) dans le complémentaire de la boule. Celle-ci fournit aussi bien le résultat positif en dimension trois que les contre-exemples en dimension supérieure. Ces derniers sont liés au point de Poisson-Arago : lorsqu'une sphère est éclairée par une source ponctuelle monochromatique, placée à une distance de la sphère ajustée relativement à la fréquence de l'onde incidente, on observe, le long de la droite joignant la source au centre de la sphère, des points éclairés situés dans *l'ombre portée* de la sphère. Cette propriété, qui résulte du fait que certaines singularités peuvent « ramper » à la surface de la sphère et être ré-émises dans l'ombre de celle-ci, est exploitée pour montrer qu'aux points en question, l'amplitude de l'onde observée est du même ordre de grandeur que s'il n'y avait pas d'obstacle en dimension trois, et d'un ordre de grandeur *supérieur* en dimension supérieure ou égale à quatre. Ce résultat surprenant et contre-intuitif est une remarquable application des techniques de paramétrix développées par Oana Ivanovici dans l'ensemble de ses travaux et constitue le spectaculaire bouquet final de son mémoire d'habilitation.

En conclusion, les travaux présentés par Oana Ivanovici dans le cadre de son mémoire d'habilitation sont remarquables. Les estimations de dispersion dans le cadre des variétés à bord n'avaient jusque ici été abordées qu'au travers de réductions au cas sans bord – ce qui ne permet pas de quantifier précisément les conséquences de la géométrie du bord sur le comportement des solutions. Les estimations de dispersion à l'intérieur d'un convexe et la construction de paramétrix permettant d'établir celles-ci représentent une avancée majeure, rendue possible par la compréhension fine de la géométrie singulière sous-jacente. Le rapporteur donne donc un avis extrêmement favorable à la soutenance de cette habilitation de tout premier plan.

Delort

Jean-Marc Delort